

Mathematik Brückenkurs WS 26/27

Fachbereich Informatik und Elektrotechnik

(Vorläufige Version)

Inhaltsverzeichnis

1. Mengen

2. Zahlenmengen

3. Potenzen / Wurzeln / Logarithmen

4. Komplexe Zahlen

5. Gleichungen

6. Trigonometrische Formeln

1 Mengen - Motivation

- Die Mengenlehre dient der Gliederung und dem Vergleich von Mengen.
- Die Konzepte der Mengenlehre finden Anwendung in der Datenverwaltung, zum Beispiel bei SQL.
- Regelung von Zugriffsrechten

```
SELECT *  
FROM M_1  
WHERE id NOT IN (  
    SELECT id FROM (  
        SELECT id FROM M_1  
        INTERSECT  
        SELECT id FROM M_2  
        UNION  
        SELECT id FROM M_3  
    ) AS Subquery  
);
```

1 Mengen - Definition

- Eine Menge ist ein abstraktes Objekt, bestehend aus wohl unterschiedenen Elementen.
- Im Allgemeinen kann alles ein Element einer Menge sein, so auch andere Mengen.

$$M = \{Elektrotechnik; Informatik; Mechatronik; Wing - ET; Cybersicherheit\}$$

- Häufig ist es hilfreich Zahlen in Mengen zusammenzufassen:

$$M = \{2; 3; 5; 7\}$$

- Kennzeichnung der Elemente: $2 \in M$, 2 ist Element von M
 $4 \notin M$, 4 ist nicht Element von M

1.1 Mengen - Darstellungsformen

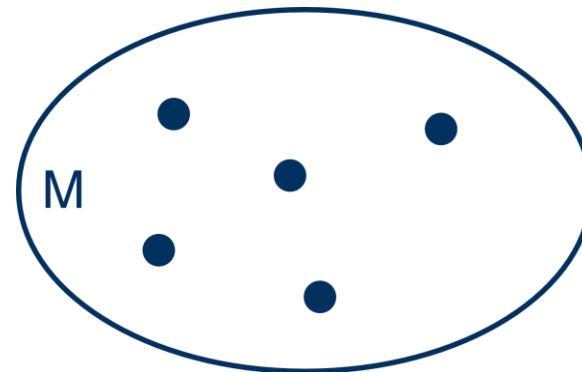
• Aufzählend: $M = \{2; 3; 5; 7\}$

• Beschreibend: $M = \{x \mid \text{Eigenschaften der Elemente } x\},$

Beispiel: $M = \{x \mid x \in \mathbb{N} \wedge x < 6\} = \{0; 1; 2; 3; 4; 5\}$

• Leere Menge: $M = \{\} = \emptyset$

• Graphische Darstellung:



1.1 Junktoren

- Mengen können miteinander verknüpft werden.
- Diese Verknüpfungen nennt man Junktoren:

Junktor	Bedeutung	Junktorenzeichen	
Negation	„nicht“	\neg	$\bar{\quad}$
Konjunktion	„und“	\wedge	\cdot
Disjunktion	„oder“	\vee	$+$
Ausschließende Disjunktion	„exklusiv oder“ „xor“	\Leftrightarrow	\oplus
Implikation	„wenn ... dann“	\rightarrow	\Rightarrow
Äquivalenz	„genau dann ... wenn“	\leftrightarrow	\Leftrightarrow

1.1.1 Aussagenlogik - Wahrheitstabellen

- Verknüpfte Aussagen lassen sich gut durch ihre Wahrheitstabellen beschreiben:

A	B	\bar{A}	\bar{B}	$A \wedge B$	$A \vee B$	$A \oplus B$	$A \rightarrow B$	$A \leftrightarrow B$
W	W	F	F	W	W	F	W	W
W	F	F	W	F	W	W	F	F
F	W	W	F	F	W	W	W	F
F	F	W	W	F	F	F	W	W

1.1.2 Aussagenlogik - Beispiele

Wir betrachten die folgenden Aussagen:

A: Tage an den es kalt ist.

B: Tagen an den es schneit.

\bar{A} Tage an den es nicht kalt ist.

$A \wedge B$ Tage an den es kalt ist und es schneit.

$A \vee B$ Tage an den es kalt ist oder es schneit oder beides gleichzeitig.

$A \leftrightarrow B$ Tage an den es kalt ist und es schneit nicht oder an den es ist nicht kalt und es schneit.

$B \rightarrow A$ An Tagen wo es schneit ist es kalt. \rightarrow nicht: Wenn es kalt ist schneit es.

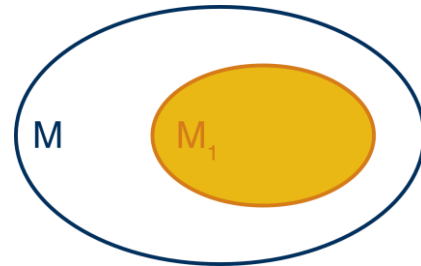
$A \leftrightarrow B$ Es schneit genau dann wenn es kalt ist. \rightarrow Nicht haltbare Aussage!

1.2.1 Mengenrelationen - Teilmenge

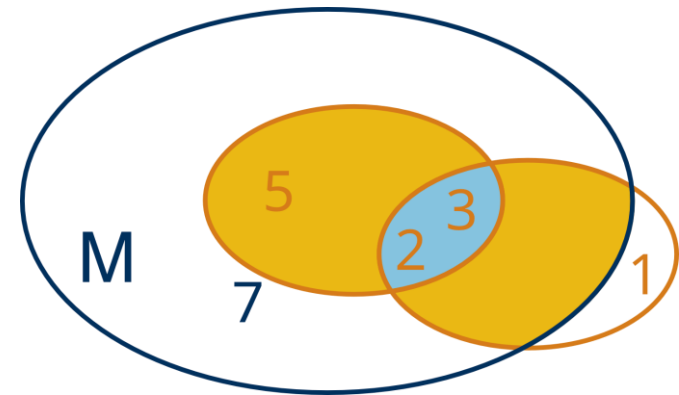
- Definition: M_1 ist Teilmenge von M , wenn jedes Element von M_1 auch Element von M ist.

- Schreibweise: $M_1 \subset M$ bzw. $M_2 \not\subset M$

- Euler-Diagramm:

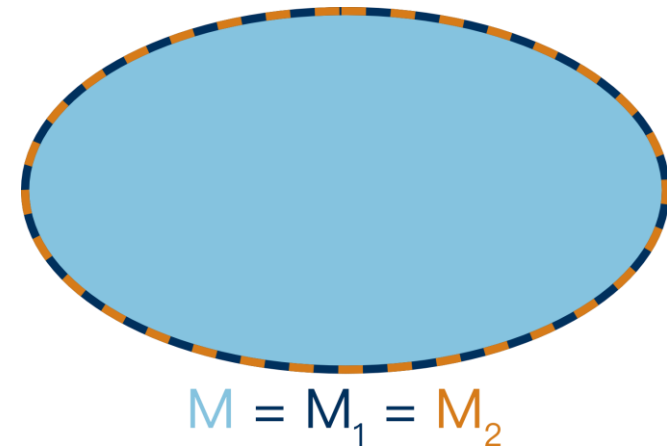


- Beispiel: $M = \{2; 3; 5; 7\}$, $M_1 = \{2; 3; 5\}$, $M_2 = \{1; 2; 3\}$



1.2.2 Mengenrelationen - Gleichheit

- Definition: Zwei Mengen heißen genau gleich, wenn beide Mengen die gleichen Elemente enthalten.
- Schreibweise: $M_1 = M$ bzw. $M_2 = M$
- Euler-Diagramm:
- Beispiele: $M_1 = \{2; 3; 5; 7\}$, $M_2 = \{2; 3; 5; 7\}$



1.2.3 Mengenoperationen - Vereinigung

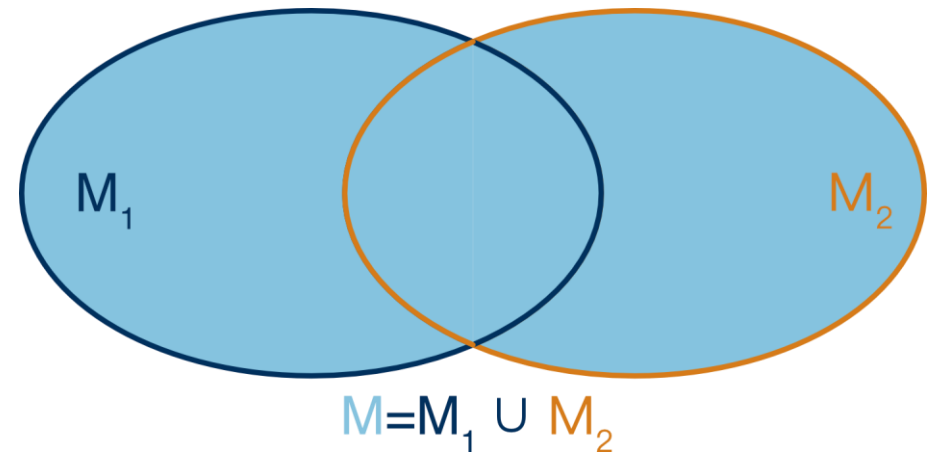
- Definition: Die Vereinigung zweier Mengen M enthält diejenigen Elemente, die in mindestens einer der beiden vereinigten Mengen M_1 und M_2 enthalten ist.

- Schreibweise: $M = M_1 \cup M_2$ bzw. $M = \{x \mid x \in M_1 \vee x \in M_2\}$

- Euler-Diagramm:

- Beispiele: $M_1 = \{2; 3; 5; 7\}$, $M_2 = \{4; 9; 1\} = \{1; 4; 9\}$

$$M = M_1 \cup M_2 = \{1; 2; 3; 4; 5; 7; 9\}$$



1.2.4 Mengenoperationen – Durchschnitt (Schnitt)

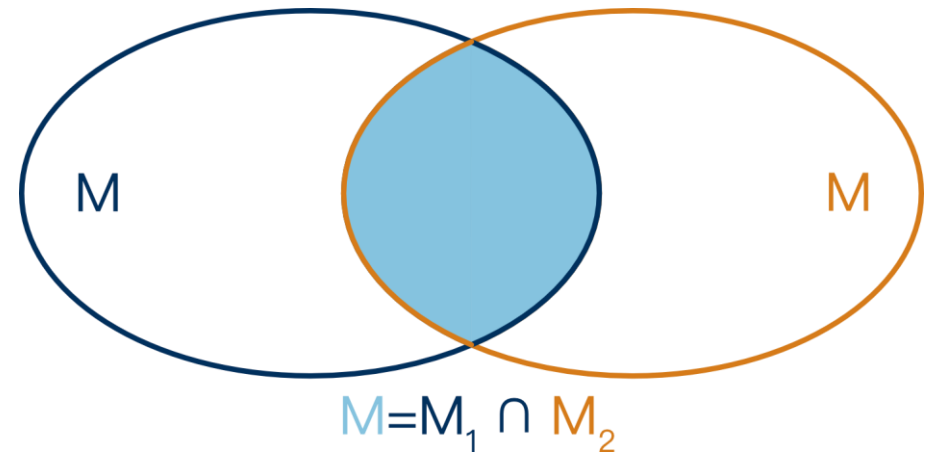
-
- Definition: Der Durchschnitt zweier Mengen M enthält diejenigen Elemente, die in beiden Mengen M_1 und M_2 enthalten sind.

- Schreibweise: $M = M_1 \cap M_2$ bzw. $M = \{x \mid x \in M_1 \wedge x \in M_2\}$

- Euler-Diagramm:

- Beispiele: $M_1 = \{1; 3; 6; 8\}$, $M_2 = \{4; 6; 8\}$

$$M = M_1 \cap M_2 = \{6; 8\}$$



1.2.5 Mengenoperationen – Differenz

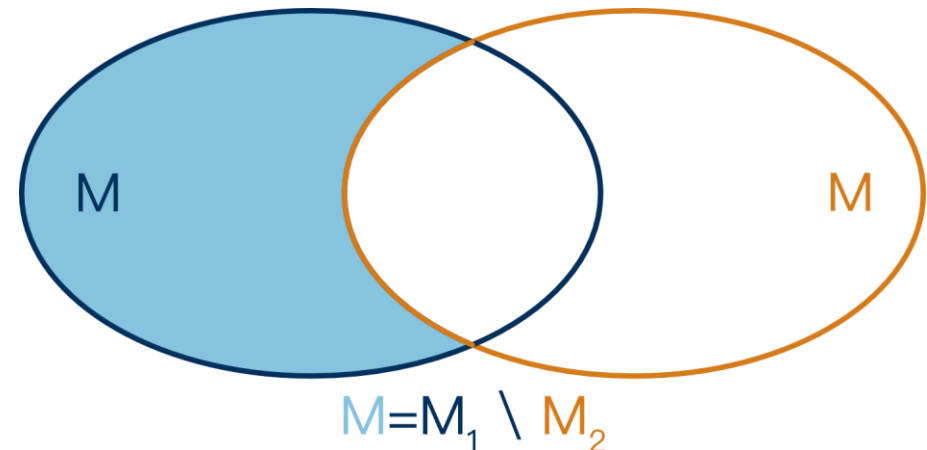
- Definition: Die Differenz zweier Mengen M_1 und M_2 enthält diejenigen Elemente, die in M_1 , aber nicht in M_2 enthalten sind.

- Schreibweise: $M = M_1 \setminus M_2$ bzw. $M = \{x \mid x \in M_1 \wedge x \notin M_2\}$

- Euler-Diagramm:

- Beispiele: $M_1 = \{2; 3; 5; 7\}$, $M_2 = \{2; 3; 4\}$

$$M = M_1 \setminus M_2 = \{5; 7\}$$



1.2.6 Mengenoperationen – Symmetrische Differenz

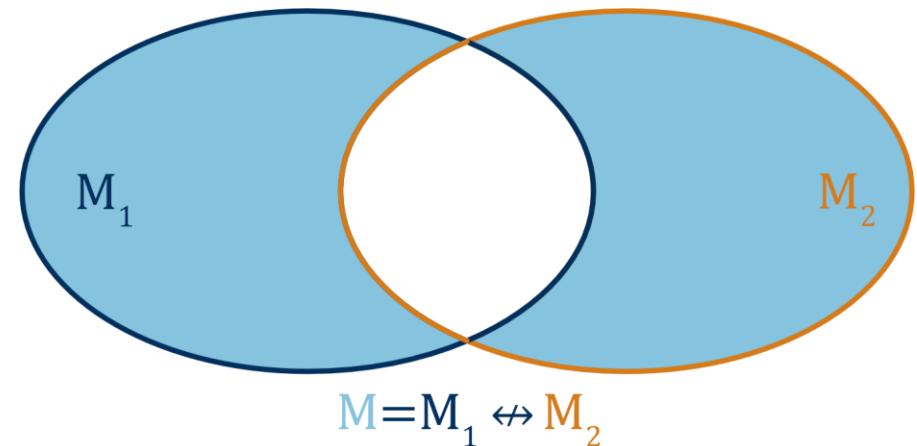
- Definition: Die symmetrische Differenz zweier Mengen M_1 und M_2 enthält diejenigen Elemente, die in M_1 oder in M_2 enthalten sind aber nicht in beiden.

- Schreibweise: $M = M_1 \triangle M_2$ bzw. $M = \{x \mid (x \in M_1 \wedge x \notin M_2) \vee (x \notin M_1 \wedge x \in M_2)\}$

- Euler-Diagramm:

- Beispiele: $M_1 = \{2; 3; 5; 7; 8\}$, $M_2 = \{2; 3; 4\}$

$$M = M_1 \triangle M_2 = \{4; 5; 7; 8\}$$



1.2.7 Intervalle

- Definition: Intervalle sind Teilmengen von \mathbb{R} , die durch zwei Randpunkte begrenzt werden

- Endliche Intervalle ($a < b$) / Andere Schreibweise

$$[a, b] = \{x \mid a \leq x \leq b\}$$

$$[a, b) = \{x \mid a \leq x < b\}$$

$$(a, b] = \{x \mid a < x \leq b\}$$

$$(a, b) = \{x \mid a < x < b\}$$

$$[a, b] = \{x \mid a \leq x \leq b\}$$

$$[a, b[= \{x \mid a \leq x < b\}$$

$$]a, b] = \{x \mid a < x \leq b\}$$

$$]a, b[= \{x \mid a < x < b\}$$

- Unendliche Intervalle

$$[a, \infty) = \{x \mid a \leq x < \infty\}$$

$$(a, \infty) = \{x \mid a < x < \infty\}$$

$$(-\infty, b) = \{x \mid -\infty < x < b\}$$

$$(-\infty, \infty) = \mathbb{R}$$

- Beispiel: $[1, 5[= \{x \mid 1 \leq x < 5\}$ \rightarrow $M = \{1; 2; 3; 4\}$

1.2.8 Mengenoperationen – Kardinalität

- Definition: Die Kardinalität oder Mächtigkeit einer Menge gibt die Anzahl der Elemente einer Menge an.
- Schreibweise: $|M| = x$
- Beispiele:
 - $M_1 = \{2; 3; 5; 7; 11; 13\} \Rightarrow |M_1| = 6$
 - $M_2 = \{0; 3; 9\} \Rightarrow |M_2| = 3$
 - $M_3 = \{\} \Rightarrow |M_3| = 0$

1.3 Mengen – Aufgaben

1. Gegeben sein die Mengen: $A = \{-3; -1; 2; 4\}$, $B = \{3; 4; 5; 6\}$ und $C = \{-1; 5; 7; 8\}$ berechnen Sie:

a) $A \cap B$ b) $A \cup B$ c) $B \setminus C$ d) $C \setminus B$ e) $A \setminus (B \cap C)$ f) $A \cap \mathbb{N}$

a) $\{4\}$ b) $\{-3; -1; 2; 3; 4; 5; 6\}$ c) $\{3; 4; 6\}$ d) $\{-1; 7; 8\}$ e) A f) $\{2; 4\}$

2. Geben Sie die folgenden Mengen möglichst einfach an

a) $[1; 2] \setminus]1; 2[$ b) $[1; 2] \setminus \{1, 2\}$ c) $]1; 2[\setminus [1; 2]$ d) $\{x \in \mathbb{R} \mid |x| \geq 1\}$

a) $\{1; 2\}$ b) $]1; 2[$ c) \emptyset d) $\mathbb{R} \setminus]-1; 1[$

1.3 Mengen – Aufgaben

3. Definieren Sie folgende Mengen M für deren Elemente x

- a) x liegen in der Menge M_1 oder Menge M_2 aber nicht in der Schnittmenge $M_1 \cap M_2$
- b) x liegen in der Menge M_1 oder M_2 aber nicht in der Menge M_3
- c) x liegen in der Menge M_1 aber nicht in der Schnittmenge von M_1 und M_2 , und auch nicht in der Menge M_3

a) $M = (M_1 \cup M_2) \setminus (M_1 \cap M_2)$ b) $M = (M_1 \cup M_2) \setminus M_3$ c) $M = M_1 \setminus ((M_1 \cap M_2) \cup M_3)$

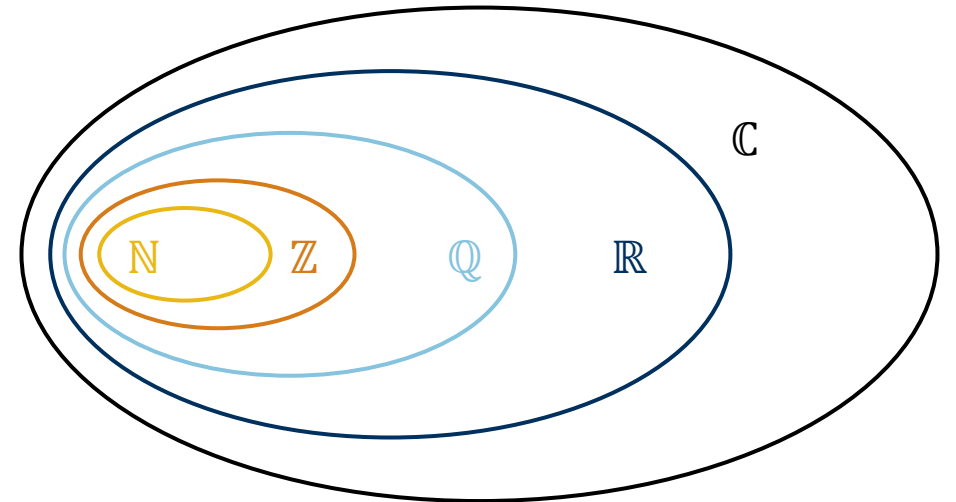
4. Vereinfachen Sie folgende Ausdrücke

a) $A \cup (A \setminus B)$ b) $A \cap (A \setminus B)$ c) $A \setminus (A \cup B)$ d) $B \cup (A \setminus B)$ e) $A \setminus (B \setminus A)$ f) $A \setminus (A \setminus B)$

a) A b) $A \setminus B$ c) \emptyset d) $A \cup B$ e) A f) $A \cap B$

2 Zahlenmengen - Motivation

- „Die ganzen Zahlen hat der liebe Gott gemacht, alles andere ist Menschenwerk.“ Leopold Kronecker
- Die Entwicklung der Zahlenmengen spiegelt die Entwicklung der Mathematik wider.
- Die Grundidee der Zahlenmengen findet sich in den Datentypen (bei statisch typisierten Programmiersprachen) in der Informatik wieder.
- Bei der Digitalisierung von z. B. Fotos werden Farbwerte von reellen Zahlen zu natürlichen Zahlen.



2 Natürliche Zahlen - Definition

- Die Natürlichen Zahlen sind alle positiven ganzen Zahlen.
- Es ist nicht eindeutig definiert, ob die 0 dazu gehört.

- Bezeichnung: $\mathbb{N} = \{0; 1; 2; 3; 4; \dots\}$ $\mathbb{N}^* = \mathbb{N} \setminus \{0\} = \{1; 2; 3; 4; \dots\}$

2.1.1 Natürliche Zahlen – Addition (+)

- unbeschränkt ausführbar: $a \in \mathbb{N} \wedge b \in \mathbb{N} \Rightarrow c = a + b \in \mathbb{N}$

- **Kommutativität:** $a + b = b + a$

- **Assoziativität:** $a + (b + c) = (a + b) + c$

- **Monotonie:** $a < b \Rightarrow a + c < b + c$

2.1.2 Natürliche Zahlen – Multiplikation (\cdot)

• Definition: $a \cdot b = \underbrace{a + a + a + a + \dots + a}_{b\text{-mal}}$ oder $a \cdot b = \underbrace{b + b + b + b + \dots + b}_{a\text{-mal}}$

• unbeschränkt ausführbar: $a \in \mathbb{N} \wedge b \in \mathbb{N} \Rightarrow c = a \cdot b \in \mathbb{N}$

• Kommutativität: $a \cdot b = b \cdot a$

• Assoziativität: $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$

• Monotonie: $a < b \Rightarrow a \cdot c < b \cdot c$

• Distributivität: $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ (Ausklammern)

2.1.3 Natürliche Zahlen – Subtraktion (-)

- Bei der Subtraktion handelt es sich um die Umkehrung der Addition.
- **beschränkt** ausführbar: $b \leq a \Rightarrow c = a - b \in \mathbb{N}$
- **NICHT Kommutativität:** $a - b \neq b - a$
- **NICHT Assoziativität:** $a - (b - c) \neq (a - b) - c$
- **Monotonie:** $a < b \Rightarrow a + c < b + c$

2.1.4 Natürliche Zahlen – Division (\div)

- Bei der Division handelt es sich um die Umkehrung der Multiplikation.
- **sehr beschränkt** ausführbar: b ist Teiler von $a \Rightarrow c = \frac{a}{b} \in \mathbb{N}$
- Division durch 0 ist nicht möglich.

2.2 Ganze Zahlen - Definition

- Die Ganzen Zahlen erweitern die Natürlichen Zahlen um die negativen Zahlen.
- Motivation: Beschränktheit der Subtraktion.
- Bezeichnung: $\mathbb{Z} = \{\dots, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$
- Die Natürlichen Zahlen sind Teilmenge der Ganzen Zahlen: $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$

2.2.1 Ganze Zahlen – Vorzeichenregeln und Absolutbetrag

- Vorzeichenregeln: $a + (-a) = 0$ $a - (-b) = a + b$
 $-(-a) = a$ $a \cdot (-b) = -a \cdot b$
- Absolutbetrag: $0 < |a| = \begin{cases} a, & \text{falls } a \geq 0 \\ -a, & \text{falls } a < 0 \end{cases}$
- Folgerungen: $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$ $|a + b| \leq |a| + |b|$

2.2.2 Ganze Zahlen – Rechenoperationen

- Addition, Multiplikation und Subtraktion sind analog zu den Natürlichen Zahlen unbeschränkt ausführbar.
- Es gelten die Kommutativität, Assoziativität und Distributivität.
- Nur die Division ist beschränkt ausführbar.

2.3 Rationale Zahlen - Definition

- Die Rationalen Zahlen erweitern die Natürlichen Zahlen um Zahlen, die als Bruch dargestellt werden können.
- Motivation: Beschränktheit der Division.
- Bezeichnung: $\mathbb{Q} = \left\{ x \mid x = \frac{a}{b}, a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{N}^* \right\}$

2.3.1 Rationale Zahlen – Rechenoperationen

- Addition: $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d + b \cdot c}{b \cdot d} \in \mathbb{Q}$
- Subtraktion: $\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d - b \cdot c}{b \cdot d} \in \mathbb{Q}$
- Multiplikation: $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d} \in \mathbb{Q}$
- Division: $\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c} \in \mathbb{Q}$

2.4 Reelle Zahlen - Definition

- Die Reellen Zahlen erweitern die Rationalen Zahlen um Zahlen, die nicht als Bruch dargestellt werden können (z. B. $\sqrt{2}$).
- Motivation: Unvollständigkeit der Rationalen Zahlen (\mathbb{R} ist vollständig).
- Bezeichnung: \mathbb{R}

2.5 Binomische Formeln

- Die **binomischen Formeln** sind in der Algebra verbreitete Formeln, die zur Umformung von Produkten aus Binomen angewendet werden.
- Ein Binom ist ein mathematischer Ausdruck, der aus zwei Gliedern besteht, die addiert oder subtrahiert werden (z. B. $(a + b)$ oder $(a - b)$).
- Man unterscheidet drei binomische Formeln:

1. $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

2. $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$


3. $(a + b) \cdot (a - b) = a^2 - b^2$


2.5 Binomische Formeln

- Durch „Rückwärtsanwendung“ lassen sich binomische Formeln häufig zur Vereinfachung von Termen einsetzen.
- Dies ist häufig der Fall, wenn in einem Ausdruck 2 Quadratzahlen vorkommen:
 - $(4 - 9) = (2 + 3) \cdot (2 - 3)$
 - $(4 + 12 + 9) = (2 + 3)^2$

2.5 Binomische Formeln

$$(a+b)^1 = a + b$$


$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$


$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$


2.5 Binomische Formeln

- Es kann auch eine andere Potenz eines Binoms gebildet werden:

- $$(a + b)^3 = 1 \cdot a^3 + 3 \cdot a^2 \cdot b + 3 \cdot a \cdot b^2 + 1 \cdot b^3$$

- $$(a + b)^4 = 1 \cdot a^4 + 4 \cdot a^3 \cdot b + 6 \cdot a^2 \cdot b^2 + 4 \cdot a \cdot b^3 + 1 \cdot b^4$$

- $$(a + b)^5 = 1 \cdot a^5 + 5 \cdot a^4 \cdot b + 10 \cdot a^3 \cdot b^2 + 10 \cdot a^2 \cdot b^3 + 5 \cdot a \cdot b^4 + 1 \cdot b^5$$

- ...

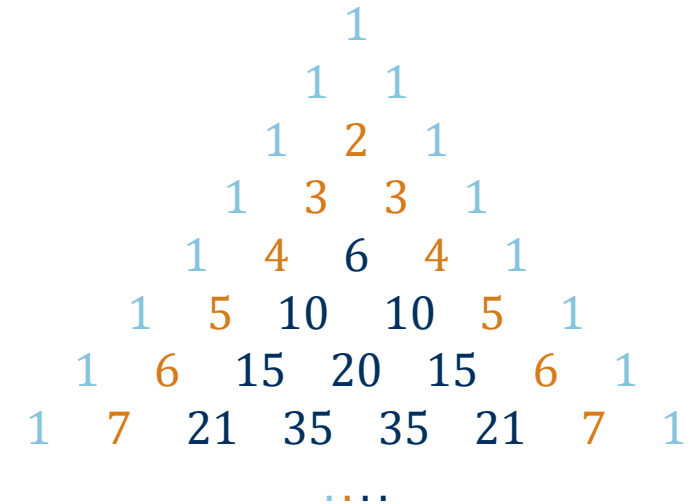
2.5 Binomische Formeln

- Es ergibt sich bei den Koeffizienten ein Muster (Pascalsches Dreieck):

- Für die Berechnung der Koeffizienten gibt es eine Rechenvorschrift:

$\binom{n}{k}$, sprich: n über k

mit $n :=$ Zeile und $k :=$ Spalte



- Aufgrund der Beziehung: $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$
ist jede Zahl im Inneren des Dreiecks die Summe der beiden unmittelbar über ihr stehenden.

2.5 Binomialkoeffizient

- $\binom{n}{k}$ ist der Binomialkoeffizient mit $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$
- $n!$ (n -Fakultät) = $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot \dots \cdot n$
- Es gilt somit für den Binomialkoeffizienten (mit $(n \in \mathbb{N}^*, k \in \mathbb{N}; n \geq k)$):

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! (n - k)!}$$

- $\binom{5}{2} = \frac{5!}{2!(5-2)!} = \frac{5!}{2! \cdot 3!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3} = \frac{120}{12} = 10$

2.5 Anwendung Binomische Formeln:

Quadratische Ergänzung

- Ziel: Überführung einer quadratischen Funktion in die Scheitelpunktform, Lösen von quadratischen Gleichungen.
- Term, in dem Variable quadratisch vorkommt, wird in ein Binom umgewandelt.
- $f(x) = 8x^2 + 112x + 396 \rightarrow$ Scheitelpunktform: $f(x) = a(x - d)^2 + e$

$$\begin{aligned} &= 8x^2 + 112x + 396 \\ &= 8(x^2 + 14x + 49,5) \\ &= 8(x^2 + 2 * 7x + 7^2 - 7^2 + 49,5) \\ &= 8((x^2 + 2 * 7x + 7^2) - 49 + 49,5) \\ &= 8((x^2 + 14x + 7^2) + 0,5) \\ &= 8(x^2 + 14x + 7^2) + 4 \\ &= 8(x + 7)^2 + 4 \end{aligned}$$

2.6 Zahlenräume – Aufgaben

1. Begründen Sie, ob die Gleichung für alle reellen Zahlen richtig ist.

- | | |
|--|---------|
| a) $a - b + c = -b + a + c$ | a) Ja |
| b) $a + b - c + d - e = a + b + d - c - e$ | b) Ja |
| c) $x + y - z = x + z - y$ | c) Nein |
| d) $x \cdot y \cdot z = y \cdot z \cdot x$ | d) Ja |
| e) $e \cdot f - g \cdot h = g \cdot h - f \cdot e$ | e) Nein |
| f) $r \cdot s + t \cdot u = u \cdot t + s \cdot r$ | f) Ja |
| g) $m + n \cdot l = m \cdot n + l$ | g) Nein |

2.6 Zahlenräume – Aufgaben

2. Vereinfachen Sie die Terme.

a) $7a - [3a - (7 + 5b)] + [a - (4 - 6b)] - (2a + 7b) =$

a) $3a + 3 + 4b$

b) $(a + b - c) \cdot (a - b - c) =$

b) $a^2 - 2ac - b^2 + c^2$

c) $(49a^2 + 42a + 9) =$

c) $(7a + 3)^2$

d) $(144a^4 - 81b^2) \div (27b + 36a^2) =$

d) $4a^2 - 3b$

e) $3 \cdot (a + b + c) - 5 \cdot (a + b) - c - 2 \cdot (b - c - a) =$

e) $4(c - b)$

f) $\frac{5}{18} + \frac{5}{6} - \frac{1}{3} + \frac{14}{27} + \frac{71}{81} =$

f) $\frac{176}{81}$

g) $\frac{a}{a-1} + \frac{a}{a+1} - 2 =$

g) $\frac{2}{a^2-1}$

h) $\frac{1-\frac{1}{a}}{\frac{1}{a}-\frac{1}{a^2}} =$

h) a

2.6 Zahlenräume – Aufgaben

3. Berechnen Sie ohne Benutzung des Taschenrechners und ohne Benutzung von gemischten Zahlen (gemischte Zahl = $1\frac{1}{2}$).

a) $\frac{2}{3} + \frac{1}{6}$

b) $\frac{9}{7} - \frac{16}{49}$

c) $\frac{1}{5} + \frac{3}{8}$

a) $\frac{5}{6}$

b) $\frac{47}{49}$

c) $\frac{23}{40}$

d) $\frac{2}{3} + \frac{3}{4}$

e) $\frac{5}{18} - 2$

f) $3 + \frac{19}{8}$

d) $\frac{17}{12}$

e) $-\frac{31}{18}$

f) $\frac{43}{8}$

g) $\frac{2}{9} - \frac{5}{6}$

h) $\frac{7}{16} + \frac{11}{24}$

i) $\frac{11}{4} + \frac{5}{6}$

g) $-\frac{11}{18}$

h) $\frac{43}{48}$

i) $\frac{43}{12}$

j) $\frac{16}{5} - \frac{7}{3}$

k) $\frac{3}{8} + \frac{6}{12} - \frac{2}{3}$

l) $\frac{3}{20} - \frac{4}{24} + \frac{31}{18}$

j) $\frac{13}{15}$

k) $\frac{5}{24}$

l) $\frac{307}{180}$

2.6 Zahlenräume – Aufgaben

4. Zusätzlich kürzen, wenn möglich.

$$a) \frac{4}{6} \cdot \frac{9}{2}$$

$$b) 7 \cdot \frac{6}{56}$$

$$c) \frac{12}{25} \cdot \frac{35}{18}$$

$$a) 3$$

$$b) \frac{3}{4}$$

$$c) \frac{14}{15}$$

$$d) \frac{64}{49} \div \frac{40}{21}$$

$$e) \frac{\frac{32}{33}}{\frac{80}{77}}$$

$$f) \frac{\frac{25}{6}}{35}$$

$$d) \frac{24}{35}$$

$$e) \frac{14}{15}$$

$$f) \frac{5}{42}$$

$$g) \frac{40}{\frac{8}{9}}$$

$$h) \frac{4}{15} \cdot \frac{\frac{6}{12}}{\frac{18}{25}}$$

$$i) \frac{5}{4} - \frac{4}{3} \cdot \frac{\frac{3}{8} + \frac{5}{6}}{\frac{1}{4}}$$

$$g) 45$$

$$h) \frac{5}{27}$$

$$i) -\frac{187}{36}$$

$$j) \frac{4}{14} \cdot \frac{\frac{3}{8}}{\frac{6}{7} - \frac{5}{8}} - \frac{3}{2}$$

$$k) 3 \cdot \frac{\frac{3}{36}}{\frac{35}{7}} \cdot \frac{\frac{4}{3}}{7} - 3$$

$$j) -\frac{27}{26}$$

$$k) -\frac{4}{3}$$

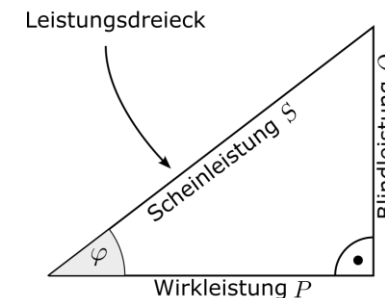
3.1 Potenzen / Wurzeln / Logarithmen

- Potenzen, Wurzeln und Logarithmen stellen wichtige grundlegende Rechenoperationen dar.
- Unser Zahlensystem (Dezimal) basiert auf Potenzen zur Basis 10.

$$\sqrt[2]{16} = 4 \Leftrightarrow 4^2 = 16 \Leftrightarrow \log_4 16 = 2$$

- Algorithmen werden so designt, dass die Komplexität logarithmisch und nicht linear ist.

Zusammenhang Scheinleistung,
Blindleistung und Wirkleistung



Satz des Pythagoras

$$S = \sqrt{P^2 + Q^2}$$

Produkt der Effektivwerte
von Spannung und Strom

$$S = U \cdot I$$

Trigonometrie

$$P = S \cdot \cos(\varphi)$$

3.1 Potenzen

- Eine Potenz ist im eigentlichen Sinne lediglich eine abkürzende Schreibweise von Multiplikationen, ebenso wie Multiplikation eine abkürzende Schreibweise der Addition ist.

$$4 + 4 + 4 + 4 + 4 = 5 \cdot 4$$

$$4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 = 1024 = 4^5$$

- Hierbei ist 4 die **Basis**, 5 der **Exponent** und 1024 das **Ergebnis**.

3.1 Potenzen

Durch Herunterzählen von Potenzen ergibt sich folgendes: $2^4 = 16$

$: 2 \downarrow$

$$2^3 = 8$$

$: 2 \downarrow$

$$2^2 = 4$$

$: 2 \downarrow$

$$2^1 = 2$$

$: 2 \downarrow$

$$2^0 = 1$$

$: 2 \downarrow$

$$2^{-1} = \frac{1}{2}$$

$: 2 \downarrow$

$$2^{-2} = \frac{1}{2^2}$$

- Potenzen mit Exponenten 0 sind grundsätzlich = 1
(Ausnahme: 0^0 ist nicht definiert. 0^1 hingegen schon.)

3.1.1 Potenzen - Rechengesetze

- Potenzen mit gleicher Basis:

$$a^n \cdot a^m = a^{n+m}$$

- Potenzen mit ungleicher Basis, aber gleichem Exponenten:

$$a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$$

- Potenzen von Potenzen:

→ In der Regel gilt: $(a^n)^m \neq a^{n^m}$

$$(a^n)^m = a^{n \cdot m}$$

3.1.1 Potenzen - Rechengesetze

- Potenzen von Brüchen mit ungleicher Basis, aber gleichem Exponenten:

$$\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$$

- Potenzen von Brüchen mit gleicher Basis, aber ungleichem Exponenten:

$$\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$$

- Negative Potenzen:

$$a^{-m} = \frac{1}{a^m}$$

3.1.2 Potenzen – Aufgaben

1. Vereinfachen Sie so weit wie möglich und geben Sie jeweils an, welches Potenzgesetz Sie anwenden.

a) $x^2 \cdot x^3$

b) $y \cdot y^2 \cdot y^4$

a) x^5

b) y^7

c) $z^7 \cdot z^{-2} \cdot z^5$

d) $\frac{x^6}{x^3}$

c) z^{10}

d) x^3

e) $\frac{x^4}{x^{-7}}$

f) $\frac{x^{-2} \cdot x^6}{x^8}$

e) x^{11}

f) $\frac{1}{x^4}$

g) $\frac{(a+b)^3}{(a+b)^4} \cdot (a+b)^5$

g) $(a+b)^4$

h) $-x^4 \cdot y^5 \cdot (x^3y^4 - x^{-3}y^2)$

h) $-x^7y^9 + xy^7$

i) $(2x^4 + 3y^2)(4x^{-2} + 6y^4)$

i) $8x^2 + 12x^4y^4 + 12x^{-2}y^2 + 18y^6$

j) $(x^2y + x^{-3}y^4)(x^5y^{-2} + x^6)$

j) $x^7y^{-1} + x^8y + x^2y^2 + x^3y^4$

3.1.2 Potenzen – Aufgaben

2. Vereinfachen und eliminieren Sie dabei die negativen Exponenten.

a) $(x^2)^3 \cdot (2^2)^2$

b) $((x^4)^3)^2 \cdot (x^2)^2$

c) $((xy)^3)^2 \cdot x^4 \cdot y^{-2}$

d) $\frac{\left(\frac{x}{y}\right)^2}{x^4 y^{-5}}$

e) $\frac{(x^2)^{-3} \cdot ((x+y)^2)^3}{(x+y)^5}$

f) $(x^2 y^3)^4 \cdot x^{-3} y^2$

a) $16x^6$

b) x^{28}

c) $x^{10} y^4$

d) $\frac{x^2}{y}$

e) $\frac{(x+y)}{x^6}$

f) $x^5 y^{14}$

3.1.2 Potenzen – Aufgaben

2. Vereinfachen und eliminieren Sie dabei die negativen Exponenten.

$$g) \frac{(x^3y^2)^3}{(x^4y^3)^2}$$

$$h) \left(\frac{x^2}{y^{-3}}\right)^5 \cdot x^4y^3$$

$$i) \frac{\left(\frac{x^{-3}}{y^2}\right)^4}{\left(\frac{x^4}{y^5}\right)^2}$$

$$j) \left(\frac{x^2y^3}{z^4}\right)^2 \cdot \left(\frac{y}{x^{-2}z^4}\right)^{-3}$$

$$k) \frac{x^3(y^4z^2)^{-2}}{(x^2y^3z^2)^4} \cdot \left(\frac{x^4}{y^5z^3}\right)^{-2}$$

$$g) x$$

$$h) x^{14}y^{18}$$

$$i) \frac{y^2}{x^{20}}$$

$$j) \frac{y^3z^4}{x^2}$$

$$k) \frac{1}{x^{13}y^{10}z^6}$$

3.1.2 Potenzen – Aufgaben

3. Lösen Sie folgende Terme:

$$\text{a) } \frac{a^{7x+5y}}{a^{4x-5y}} - \frac{a^{6y+8x}}{a^{5x-4y}} =$$

$$\text{a) } 0$$

$$\text{b) } 6 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)^3 + 5 \left(-\frac{2}{3}\right)^2 =$$

$$\text{b) } 2$$

$$\text{c) } \left(\frac{x^3}{y^{-1}}\right)^{-2} \cdot \frac{x^5}{y^{-3}} =$$

$$\text{c) } \frac{y}{x}$$

$$\text{d) } \frac{1-2x^2}{x^n} - \frac{3x-2}{x^{n-2}} + \frac{3}{x^{n-3}} =$$

$$\text{d) } \frac{1}{x^n}$$

$$\text{e) } a^{x+y} \cdot a^{x-y} =$$

$$\text{e) } a^{2x}$$

3.2 Wurzeln - Definition

- Bisher: Probleme der Form: $a^b = c$ mit gegebenen $a, b \in \mathbb{R}$
- Nun: Lösung von Problemen der Form: $a^b = c$ mit gegebenen $b, c \in \mathbb{R}$, z. B. $a^3 = 8$
- Durch Einführung des Wurzeloperators lässt sich das Problem umformulieren: $\sqrt[3]{8} = a$
Die Wurzel beantwortet somit die Frage, was 3-mal mit sich selbst genommen 8 ergibt.
- Begrifflichkeiten: c wird als **Radikand**, b als **Wurzelexponent** bezeichnet.

3.2 Wurzeln - Definition

- Bei Quadratwurzeln ($b = 2$) wird der Wurzelexponent in der Regel nicht angegeben:

$$\sqrt[2]{9} = \sqrt{9} = 3$$

- Je nach Aufgabenstellung und nach realen Problemen wird nicht nur die positive Lösung gesucht. Da Potenzen bei graden Exponenten immer positiv sind (zumindest im reellen), besitzt $\sqrt{9}$ noch die weitere Lösung -3 . Damit gilt:

$$\sqrt{9} = \pm 3$$

3.2 Wurzeln - Definition

- Im reellen Zahlenraum sind Wurzeln von negativen Radikanden nicht definiert. $\sqrt{-3}$ besitzt beispielsweise keine reelle Lösung.
- Es gibt jedoch Lösungen im komplexen Zahlenraum $\mathbb{C} \rightarrow$ Kapitel 5

3.2.1 Wurzeln - Rechenregeln

- Für alle Rechenregeln gilt: $m, n \in \mathbb{N}^*$, $a, b \geq 0$

$$\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$$

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}, \quad (b > 0)$$

$$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$$

$$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[m \cdot n]{a}$$

3.2.1 Wurzeln – Aufgaben

1. Vereinfachen Sie den Term und schreiben Sie nicht ganzzahligen Exponenten wieder als Wurzel.

$$\text{a) } \frac{a^{\frac{1}{2}} \cdot a^{\frac{2}{3}} \cdot a^{\frac{1}{4}}}{b^{\frac{2}{5}}}$$

$$\text{b) } \left(a^{\frac{1}{2}} b^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}} \cdot \left(a^{-\frac{1}{4}}\right)^2$$

$$\text{a) } \frac{{}^{12}\sqrt{a^{17}}}{{}^5\sqrt{b^2}}$$

$$\text{b) } \sqrt[4]{a} \cdot b$$

$$\text{c) } \sqrt[3]{a} \cdot \sqrt{b} \cdot \sqrt[4]{a} \cdot \sqrt[5]{b}$$

$$\text{d) } \frac{\sqrt{a} \cdot \sqrt{a^3}}{\sqrt[3]{a}}$$

$$\text{c) } {}^{12}\sqrt{a^7} \cdot {}^{10}\sqrt{b^7}$$

$$\text{d) } \sqrt[3]{a^5}$$

$$\text{e) } \frac{\sqrt[3]{x^2} \cdot x^2}{\sqrt[4]{25x^3}}$$

$$\text{f) } \sqrt{ab} \cdot \sqrt[3]{27ab}$$

$$\text{e) } \frac{{}^{12}\sqrt{x^{23}}}{\sqrt{5}}$$

$$\text{f) } 3 \cdot \sqrt[6]{a^5 b^5}$$

$$\text{g) } \sqrt{4a^2 b^4 c^6} \cdot a^3 b^2$$

$$\text{h) } \frac{\sqrt[5]{x^7 y^4}}{\sqrt[4]{16x^2 y^3}}$$

$$\text{g) } 2a^4 b^4 c^3$$

$$\text{h) } \frac{1}{2} {}^{10}\sqrt{x^9} \cdot {}^{20}\sqrt{y}$$

3.2.1 Wurzeln – Aufgaben

1. Vereinfachen Sie den Term und schreiben Sie die nicht ganzzahligen Exponenten wieder als Wurzel.

$$i) \sqrt[4]{\frac{x^2}{y^3}} \cdot \sqrt[5]{\frac{y^2}{x^3}}$$

$$j) \sqrt[3]{\frac{x^2}{y^{-4}z^2}} \cdot \sqrt[3]{x^2y^4z}$$

$$i) \frac{1}{10\sqrt{x} \cdot 20\sqrt[20]{y^7}}$$

$$j) \frac{\sqrt[3]{x^4} \sqrt[3]{y^8}}{\sqrt[3]{z}}$$

$$k) \frac{\sqrt[3]{\sqrt{x^{-4}}}}{\sqrt{x^2}} \cdot x$$

$$l) \frac{\sqrt{x} \sqrt[3]{y} \cdot (5\sqrt{y} \cdot x^2)^{-3}}{\sqrt{x} \cdot x^{-2}}$$

$$k) \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$$

$$l) \frac{1}{x^4 \cdot \sqrt[30]{y^{13}}}$$

$$m) (\sqrt[4]{x^3} + \sqrt{x^3})^2$$

$$n) \frac{\sqrt{x+y} \cdot \sqrt[3]{(x+y)^2} \cdot x}{\sqrt{x^4} \cdot (x+y)}$$

$$m) \sqrt{x^3} + 2 \cdot \sqrt[4]{x^9} + x^3$$

$$n) \frac{\sqrt[6]{x+y}}{\sqrt[3]{x^5}}$$

$$o) \frac{\sqrt[3]{a^4 - \sqrt{a^2}}}{a^3}$$

$$o) \frac{1}{\sqrt[3]{a^5}} - \frac{1}{a^2} = \frac{\sqrt[3]{a-1}}{a^2}$$

3.2.1 Wurzeln – Aufgaben

2. Berechnen Sie:

a) $\sqrt[4]{\sqrt[3]{x^2}} \cdot \sqrt[6]{x^{10}} + \sqrt[9]{y^6 \sqrt[4]{y^{12}}}$ b) $a \cdot \sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2}}$ c) $\sqrt[3]{\frac{a}{b}} \cdot \sqrt{\frac{b}{a}}$ d) $a \cdot b \cdot \sqrt[3]{\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2}}$

e) $a \sqrt{\left(\frac{n^{x+a}}{n^x}\right)^c}$ f) $(n+x)^{3/4} \cdot \sqrt[4]{(n+x)^5}$ g) $16\sqrt{a^6 \cdot b^7} \div 4\sqrt{a^4 \cdot b^5}$ h) $\sqrt[3]{x\sqrt{x}} - 4\sqrt{x}$

a) $x + y$ b) $\sqrt{a^2 + b^2}$ c) $\sqrt[6]{\frac{b}{a}}$ d) $\sqrt[3]{ab(b^2 - a^2)}$ e) n^c f) $(n+x)^2$ g) $4ab$ h) $-3\sqrt{x}$

3.3 Logarithmen - Definition

- Bisher: Probleme der Form: $a^b = c$ mit gegebenen $a, b \in \mathbb{R}$
- Nun: Lösung von Problemen der Form: $a^b = c$ mit gegebenen $a, c \in \mathbb{R}$, z. B. $2^b = 8$
- Durch Einführung des Logarithmus lässt sich das Problem umformulieren: $\log_2 8 = b$
Der Logarithmus beantwortet somit die Frage, wie oft die 2 mit sich selbst Mal genommen werden muss, um das Ergebnis 8 zu erhalten.
- Begrifflichkeiten: a wird als **Basis**, b als **Exponent** und c als **Numerus** bezeichnet.

3.3.1 Logarithmen - Rechenregeln

- Für alle Rechenregeln gilt: $a, u, v > 0$; $k \in \mathbb{R}$; $n \in \mathbb{N}^*$

$$\log_a(u \cdot v) = \log_a(u) + \log_a(v)$$

$$\log_a(u^k) = k \cdot \log_a(u)$$

$$\log_a\left(\frac{u}{v}\right) = \log_a(u) - \log_a(v)$$

$$\log_a \sqrt[n]{u} = \frac{1}{n} \cdot \log_a(u)$$

$$\text{Basiswechsel } (a \rightarrow b): \log_a u = \frac{\log_b u}{\log_b a}$$

3.3.2 Logarithmen – besondere Logarithmen

- Zehnerlogarithmus bzw. dekadischer Logarithmus zur Basis 10: $\log_{10}(u) := \lg(u)$
- Zweierlogarithmus bzw. binärer Logarithmus zur Basis 2: $\log_2(u) := lb(u)$ oder $ld(u)$
- Natürlicher Logarithmus (logarithmus naturalis) zur Basis e : $\log_e(u) := \ln(u)$

3.3.2 Logarithmen – besondere Logarithmen

$$\log_b 1 = 0$$

$$\log_a a = 1$$

$$\log_b 0 \rightarrow -\infty$$

$$\log_a a^x = x$$

3.3.3 Logarithmen – Aufgaben

1. Berechnen Sie ohne Taschenrechner:

a) $\log_3 9$ b) $\log_2 8$ c) $\log_2 \sqrt{2}$ d) $\log_7 \frac{1}{49}$ e) $\ln(e)$ f) $\lg 100$

2. Berechnen Sie:

a) $\frac{1}{2} \lg a + 2 \lg c - \frac{1}{3} (\lg b^3 + \lg a^{3/2})$

b) $\frac{1}{2} \lg(a^2 - ab + b^2) + \frac{1}{2} \lg(a + b)$

c) $\lg\left(\frac{a}{b}\right) + \lg(ab) - 2 \lg(a - b)$

d) $\log_5 x = -2$

a) $\lg\left(\frac{c^2}{b}\right)$

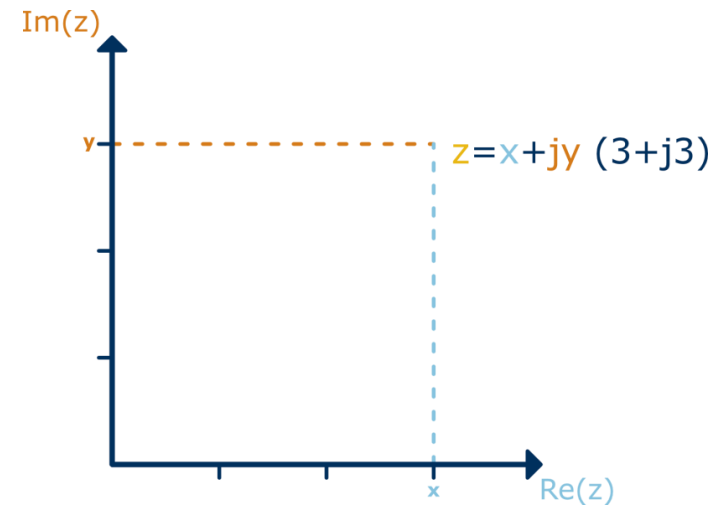
b) $\lg \sqrt{a^3 + b^3}$

c) $\lg\left(\frac{a}{a-b}\right)^2$

d) $\frac{1}{25}$

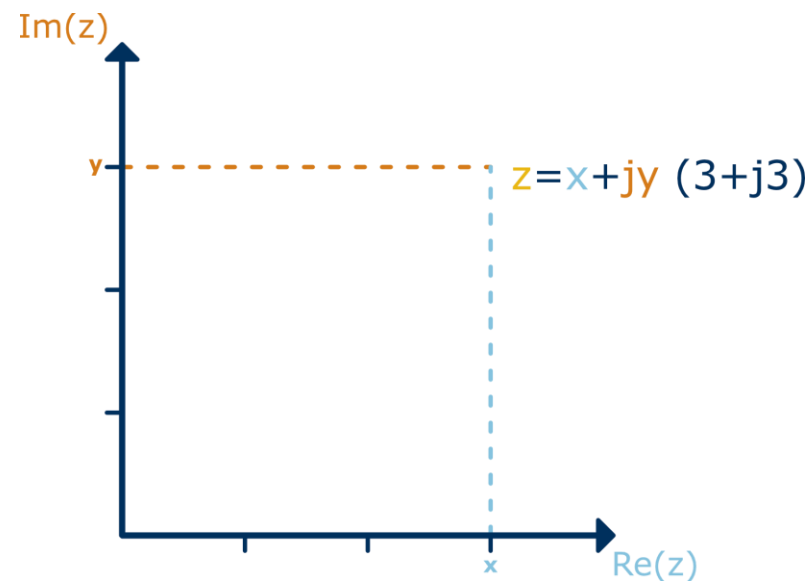
4 Exkurs – Komplexe Zahlen \mathbb{C}

- Die komplexen Zahlen erweitern die Reellen Zahlen um Lösungen der Wurzel aus negativen Zahlen. Hierzu wird die imaginäre Einheit j definiert: $j^2 = -1 \rightarrow j = \sqrt{-1}$
- Eine komplexe Zahl $z = x + jy$ setzen sich aus einem Realteil ($\text{Re}(z)$) und einem Imaginärteil ($\text{Im}(z)$) zusammen und wird nicht auf einem Zahlenstrahl, sondern in der **komplexen Zahlenebene** (Gaußsche Zahlenebene) angeordnet.



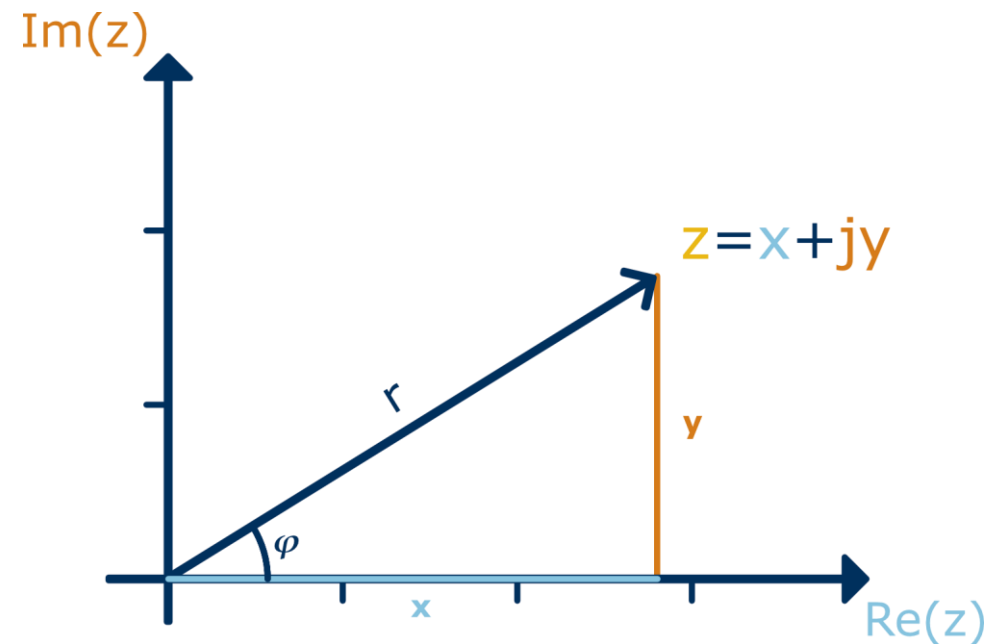
4 Exkurs – Komplexe Zahlen \mathbb{C}

- Die Punkte auf der reellen Achse bilden die Menge der **Reellen Zahlen** ($z = x + j \cdot 0$).
- Die Punkte auf der imaginären Achse die **Imaginären Zahlen** ($z = 0 + j \cdot y$).
- Komplexe Zahlen können einfach in einem **kartesischen Koordinatensystem** eingezeichnet werden.



4 Exkurs – Komplexe Zahlen \mathbb{C}

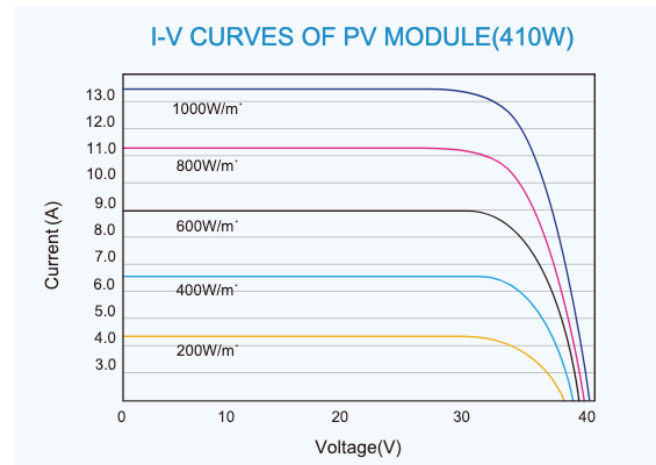
- Die komplexe Zahl $z = x + jy$ kann auch durch **Polarkoordinaten** (r, φ) beschrieben werden. Diese sind festgelegt durch den **Betrag** $r = |z|$ (Länge des zugehörigen Zeigers) und den **Winkel** φ zur positiven reellen Achse.



5 Gleichungen - Motivation

Beschreibung von technischen Sachverhalten mithilfe von (Funktions-)Gleichungen:

- Kennlinie eines PV-Moduls:
- Energiegehalt einer strömenden Flüssigkeit: **$E_{ges} = E_{pot} + E_{kin} + E_p$**



5 Gleichungen - Definition

- Gleichungen sind Aussagen, denen man einen Wahrheitsgehalt geben kann.
- Sehr einfache Gleichungen enthalten keine unbekannt Elemente (Variablen). Für solche ist der Wahrheitswert unmittelbar ablesbar:

$$4 + 3 = 7 \Rightarrow \text{wahr}$$

$$12 + 2 = 3 \Rightarrow \text{falsch}$$

5 Gleichungen - Definition

- Aufwendiger (interessanter) wird es durch die Einführung von Variablen:

$$4 + x = 7$$

- Es können unendlich viele Werte für x eingesetzt werden, aber nur für einen Wert ($x = 3$) ist die Gleichung wahr.
- Beim Umgang mit Gleichungen beschäftigt man sich häufig mit der Frage, für welche Werte die Gleichung den Wahrheitswert wahr annimmt. Hierzu wird die Gleichung „gelöst“.
- Gleichungen können mehrere Variablen aufweisen!

5 Gleichungen – Klassifizierung von Gleichungen

Es gibt unterschiedliche Klassen von Gleichungen. Diese werden anhand verschiedener Eigenschaften eingeordnet. Z. B. nach der ...

- Anzahl der Variablen
- Art der Verknüpfung der Variablen und Zahlen
- **algebraische Gleichungen** enthalten rationale Rechenoperationen (+, -, ·, ÷) und das Wurzelziehen (Radizieren) endlich oft. Die Variable kommt hierbei nicht im Exponenten vor.
$$a_n \cdot x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + \dots + a_1 \cdot x^1 + a_0 = 0, \quad \text{mit } n \in \mathbb{N}, a_i \in \mathbb{R}$$
- **transzendente Gleichungen:** $e^x - 1 = x$ $\sin(2x) + \ln x = 0$

5.1 Lineare Gleichungen

- Lineare Gleichungen sind Gleichungen, in denen die Variable nur mit der Potenz 1 vorkommt:

$$5x + 7 = 17$$

- Lineare Gleichungen haben immer exakt eine Lösung, die sich durch äquivalente Umformungen finden lässt: **Rechnung**
- Das Äquivalenzzeichen ist das gleiche wie aus der Logik, es bedeutet, dass die Aussage weiterhin äquivalent, also gleich ist. Sie ist auch wieder umkehrbar.

5.2 Quadratische Gleichungen

- Quadratische Gleichungen sind Gleichungen, in denen die Variable maximal mit der Potenz 2 vorkommt:

$$x^2 = 4$$

$$x^2 + 2x + 1 = 0$$

- Quadratische Gleichungen haben im Zahlenraum der Reellen Zahlen entweder keine oder zwei Lösungen. Diese lassen sich nur in den seltensten Fällen durch äquivalente Umformungen finden: [Rechnung](#)

5.2 Quadratische Gleichungen

- Quadratische Gleichungen sind Gleichungen, in denen die Variable maximal mit der Potenz 2 vorkommt:

$$x^2 = 4$$

$$x^2 + 2x + 1 = 0$$

- Im Allgemeinen lassen sich quadratische Gleichungen mithilfe der pq-Formel lösen:

1. Überführung der Gleichung $ax^2 + bx + c = 0$ in die Form $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = x^2 + px + q = 0$

2. Bestimmung der Lösungen (falls vorhanden) mithilfe der Formel: $x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$

5.2 Quadratische Gleichungen

- Mithilfe des Ausdrucks unter der Wurzel (Diskriminante) lässt sich frühzeitig erkennen, ob die Gleichung lösbar ist, und wie viele Lösungen vorhanden sind.

- $D = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q > 0$: zwei verschiedene reelle Lösungen
- $D = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = 0$: eine (zwei identische) Lösungen
- $D = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q < 0$: keine reelle Lösung (komplexe Lösung)

5.3 Gleichungen höheren Grades

- Bei Gleichungen vom Grad größer 2 ist eine analytische Lösungsfindung schwierig oder sogar unmöglich:
- $n = 3, 4$: analytische Lösungen möglich, jedoch in der Praxis umständlich.
- $n > 4$: ausschließlich numerisch lösbar.

5.4 Gleichungen – Aufgaben

2. Lösen Sie die Gleichungen nach x auf und geben Sie die Lösungsmenge an.

a) $\frac{x-a}{a} = 24a$

b) $6b = \frac{3b-x}{4b} + b$

a) $\mathbb{L} = \{24a^2 + a\}$

b) $\mathbb{L} = \{-20b^2 + 3b\}$

c) $3c = (c - x) \cdot c$

d) $\frac{ax}{a+c} = 2a$

c) $\mathbb{L} = \{c - 3\}$

d) $\mathbb{L} = \{2(a + c)\}$

e) $4a = b \cdot \frac{3x}{a}$

f) $2b - \frac{x+a}{a-b} \cdot b = 3b$

e) $\mathbb{L} = \left\{ \frac{4}{3} \cdot \frac{a^2}{b} \right\}$

f) $\mathbb{L} = \{b - 2a\}$

g) $ax + bx = 3$

h) $ax = \frac{2x}{b} + 4$

g) $\mathbb{L} = \left\{ \frac{3}{a+b} \right\}$

h) $\mathbb{L} = \left\{ \frac{4b}{ab-2} \right\}$

i) $a + bx = \frac{2cx+4x}{a}$

j) $\frac{3ax-12}{4b} = (5x - a) \cdot 3b$

i) $\mathbb{L} = \left\{ \frac{a^2}{2c+4-ab} \right\}$

j) $\mathbb{L} = \left\{ \frac{4(1-ab^2)}{a-20b^2} \right\}$

5.4 Gleichungen – Aufgaben

3. Bestimmen Sie die Lösungsmenge der Gleichungen.

a) $x^2 + x - 6 = 0$

a) $\mathbb{L} = \{-3, 2\}$

b) $4x(2x + 5) = 14x\left(\frac{x}{2} + \frac{1}{7}\right) + 21x + 40$

b) $\mathbb{L} = \{-5, 8\}$

c) $2x^2 + 7x - 4 = 0$

c) $\mathbb{L} = \left\{-4, \frac{1}{2}\right\}$

d) $-3x^4 + 9x^2 - 6 = 0$

d) $\mathbb{L} = \{-\sqrt{2}, -1, 1, \sqrt{2}\}$

e) $6x^2(2x^4 - 3x^2) - 3 = 21x^3 - 3x^3(4x^3 + 5x) - 3x^4$

e) $\mathbb{L} = \left\{-\frac{1}{2}, 1\right\}$

5.4 Gleichungen – Aufgaben

4. Lösen Sie die Gleichungen nach x auf.

a) $\frac{3}{x} = 4$ b) $a = \frac{b}{2x} + 4$ c) $\frac{1}{x} = \frac{2}{a} + \frac{b}{3}$ d) $\frac{3a+6b}{x} = \frac{24c}{5}$

a) $x = \frac{3}{4}$ b) $x = \frac{b}{2(a-4)}$ c) $x = \frac{3a}{6+ab}$ d) $x = \frac{5(a+2b)}{8c}$

5. Lösen Sie die Gleichungen nach x auf.

a) $(3x - 7) \cdot (x + 2) = 0$ b) $3x^2 + 5x = 0$ c) $x^2 + 5x + 6 = 0$

d) $3x^2 - 5x + 4 = 0$ e) $(x - 1)^2 \cdot (x + 2) = 4 \cdot (x + 2)$

f) Gegeben sei $x^2 + 2 \cdot (k + 2) \cdot x + 9k = 0$, für welches k fallen die Nullstellen zusammen?

a) $x_1 = \frac{7}{3}, x_2 = -2$ b) $x_1 = 0, x_2 = -\frac{5}{3}$ c) $x_1 = -2, x_2 = -3$ d) *komplexe Lösung*

e) $x_1 = -2, x_2 = 3, x_3 = -1$ f) $k_1 = 1, k_2 = 4$

5.5 Wurzelgleichungen

- Wurzelgleichungen sind Gleichungen, in denen die Variable (auch) in einer Wurzel vorkommt:

$$\sqrt{x + 1} + 1 = 3$$

- Wurzelgleichungen lassen sich stets durch ein algorithmisches Lösungsverfahren lösen:
 1. Den Wurzelausdruck auf einer Seite des Gleichheitszeichens isolieren.
 2. Quadrieren der gesamten Gleichung.
 3. Die Variable auf einer Seite des Gleichheitszeichens isolieren.
 4. Probe durchführen.

5.6.1 Wurzelgleichungen – Aufgaben

1. Lösen Sie die Gleichungen und führen Sie die Probe durch.

a) $3 - 2\sqrt{x} = -4$

b) $\sqrt{x-1} + \sqrt{x+8} = 9$

c) $\sqrt{16 + 3\sqrt{7x-5}} = 2\sqrt{7}$

d) $\sqrt{x+3} + \sqrt{2(x-4)} = \frac{15}{\sqrt{x+3}}$

e) $\sqrt{2x-3} + 5 - 3x = 0$

f) $\sqrt{x+15} - \sqrt{10-x} = 1$

g) $\sqrt{x+1} + \sqrt{2x+3} - \sqrt{8x+1} = 0$

h) $\sqrt[3]{28 - \sqrt{2x-3}} = 3$

a) $x = \frac{49}{4}$ (w)

b) $x = 17$ (w)

c) $x = 3$ (w)

d) $x_1 = 6$ (w), $x_2 = -28$ (f)

e) $x_1 = 2$ (w), $x_2 = \frac{14}{9}$ (f)

f) $x_1 = 1$ (w), $x_2 = -6$ (f)

g) $x_1 = -\frac{1}{17}$ (f), $x_2 = 3$ (w)

h) $x = 2$ (w)

5.6.2 Wurzelgleichungen – Aufgaben

2. Bestimmen Sie die Lösungsmengen.

a) $\sqrt{x + 42} = x$

b) $\sqrt{3x^2 + 2} = \sqrt{4x^2 - 7}$

c) $\sqrt{8x + 20} = 5x - 4$

d) $2x + \sqrt{41 - 8x} = 5$

e) $6x + 4 + \sqrt{-30x + 26} = 9x - 1$

f) $\sqrt{-12x} - \sqrt{-8x + 1} = \sqrt{2x + 7}$

g) $\sqrt{9x + 9} - \sqrt{7x - 7} = \sqrt{-x + 12}$

h) $\sqrt{x} \cdot \sqrt[3]{x} = 32$

i) $\frac{32}{\sqrt[3]{x^2}} = 2\sqrt[3]{x^2}$

j) $\frac{3x-2}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x} - 1$

a) $x_1 = 7$ (w), $x_2 = -6$ (f)

b) $x_{1,2} = \pm 3$ (w)

c) $x_1 = 2$ (w), $x_2 = -\frac{2}{25}$ (f)

d) $x_1 = -1$ (w), $x_2 = 4$ (w)

e) $x_{1,2} = \pm \frac{1}{3}$ (f)

f) $x_1 = -3$ (w), $x_2 = -\frac{3}{25}$ (f)

g) $x_1 = 8$ (w), $x_2 = \frac{44}{37}$ (w)

h) $x = 64$ (w)

i) $x_{1,2} = \pm 8$ (2)

j) $x_1 = 1$ (w), $x_2 = 4$ (f)

5.7 Logarithmusgleichungen

- Logarithmusgleichungen sind Gleichungen, in denen die Variable (auch) im Numerus eines Logarithmus vorkommt:

$$\lg x = 10$$

- Logarithmusgleichungen lassen sich durch ein algorithmisches Lösungsverfahren lösen:
 1. Den Logarithmus auf einer Seite des Gleichheitszeichens isolieren.
 2. Potenzieren der gesamten Gleichung
 3. Die Variable auf einer Seite des Gleichheitszeichens isolieren.

5.7 Logarithmusgleichungen – Aufgaben

1. Berechnen Sie die Lösung für x .

a) $\log_2 x = 5$

b) $\log_x 4 = 2$

c) $\log_x 27 = 3$

d) $\log_x 4 = \frac{2}{3}$

e) $\log_3 x = 2$

f) $\log_x 81 = 4$

g) $\log_{10} x = 1$

h) $\text{lb } 128 = x$

i) $\ln x = 2$

j) $\ln x = 5$

a) $x = 32$

b) $x = 2$

c) $x = 3$

d) $x = 8$

e) $x = 9$

f) $x = 3$

g) $x = 10$

h) $x = 7$

i) $x = e^2$

j) $x = e^5$

5.7 Logarithmusgleichungen – Aufgaben

2. Berechnen Sie die Lösung für x .

a) $\log_3 x + \log_3 x = 4$

a) $x = 9$

b) $\log_5(x) + \log_5(x^2) = 3$

b) $x = 5$

c) $2 \log_9(x) + \log_9(x) = 3$

c) $x = 9$

d) $3 \log_2(x) - 2 \log_2(2x) = -3$

d) $x = \frac{1}{2}$

e) $4 \log_3(3x) + 2 \log_3(4x) = \log_3(48x^3)$

e) $x = \frac{1}{3}$

f) $\log_2(x) \cdot \log_2(16) = 4$

f) $x = 2$

g) $6 \ln x = 2 \ln(25x) + 8$

g) $x = 5e^2$

5.8 Ungleichungen

- Eine Ungleichung beschreibt zwei Terme, die nicht wie bisher genau gleich sein sollen. Die Beziehung der Terme wird über andere Relationszeichen ($<$, $>$, \leq , \geq) beschrieben.
- Als Lösung von Ungleichungen ergeben sich keine eindeutigen Lösungen, sondern Intervalle, in denen die Ungleichung den Wahrheitswert „wahr“ annimmt.

$$x + 2 > -8$$

5.8 Ungleichungen

$$x + 2 > -8$$

- Zum Lösen von Ungleichungen können folgende Umformungen genutzt werden:
 1. Addition oder Subtraktion eines Terms auf beiden Seiten der Ungleichung.
 2. Multiplikation oder Division eines Terms auf beiden Seiten der Ungleichung ...
 - a. mit einer positiven Zahl ohne Einschränkungen.
 - b. mit einer negativen Zahl mit „Drehung“ des Relationszeichens ($< \leftrightarrow >$, $\leq \leftrightarrow \geq$).

5.7.2 Ungleichungen – Aufgaben

1. Berechnen Sie die Lösungsmengen.

a) $2x - 3 > 9$

a) $\mathbb{L} = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 6\}$

b) $4x - 2 \leq 6$

b) $\mathbb{L} = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 2\}$

c) $-5x + 2 < -4x + 7$

c) $\mathbb{L} = \{x \in \mathbb{R} \mid x > -5\}$

d) $-6x + 3 \geq 6$

d) $\mathbb{L} = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq -\frac{1}{2}\right\}$

e) $-9x + 4 \geq -2$

e) $\mathbb{L} = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq \frac{2}{3}\right\}$

f) $x^2 - x - 2 \leq 0$

f) $\mathbb{L} = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 \leq x \leq 2\}$

g) $x^2 + x - 1 \geq 0$

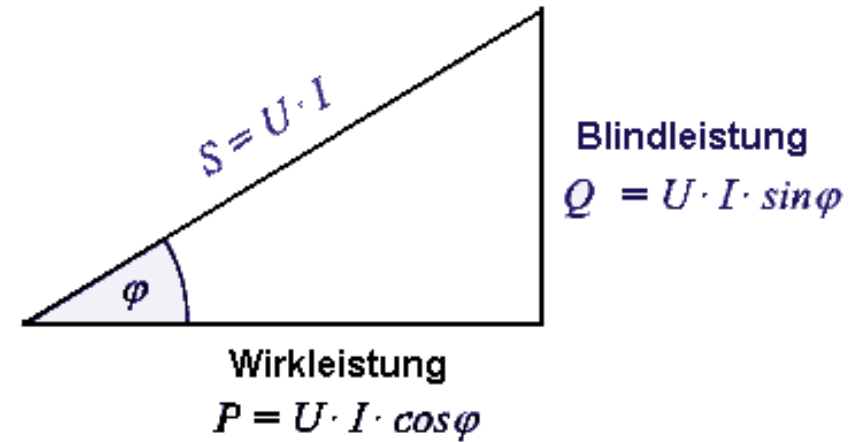
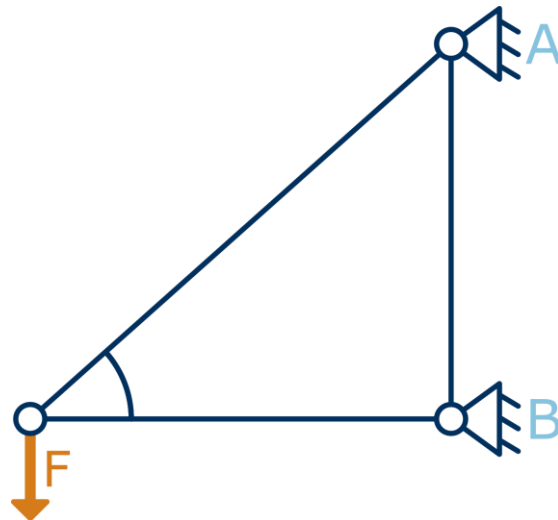
g) $\mathbb{L} = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq -\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{5}{4}} \vee x \geq -\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{5}{4}}\right\}$

h) $\frac{x-1}{x+1} < 1$

h) $\mathbb{L} = \{x \in \mathbb{R} \mid x > -1\}$

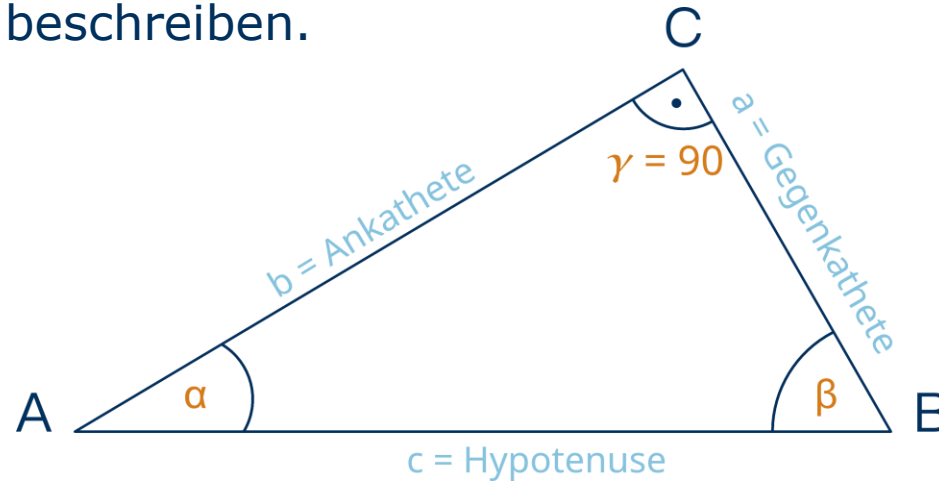
6 Trigonometrische Formeln - Motivation

- Wechselstromrechnung
- Statik



6 Trigonometrische Formeln

- Mithilfe der **Trigonometrischen Formeln** (Funktionen) lassen sich Zusammenhänge in rechtwinkligen Dreiecken beschreiben.



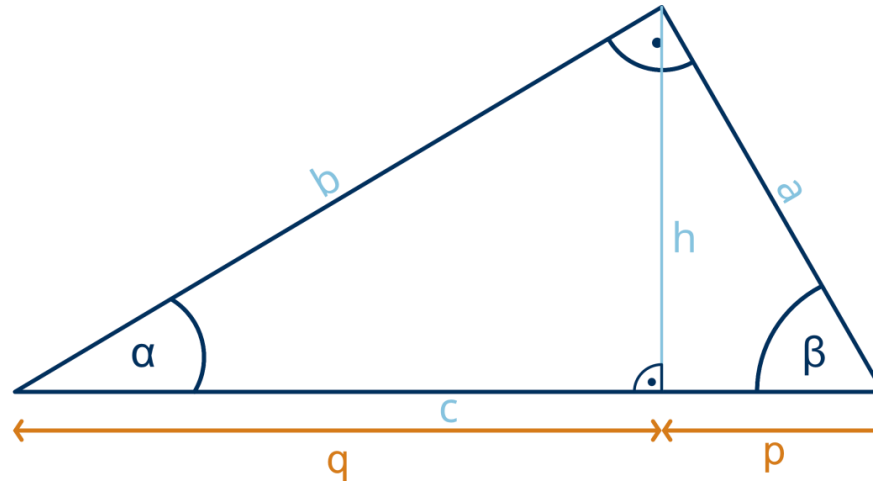
$$\sin \alpha = \frac{a}{c} = \frac{\text{Gegenkathete von } \alpha}{\text{Hypotenuse von } \alpha}$$

$$\cos \alpha = \frac{b}{c} = \frac{\text{Ankathete von } \alpha}{\text{Hypotenuse von } \alpha}$$

$$\tan \alpha = \frac{a}{b} = \frac{\text{Gegenkathete von } \alpha}{\text{Ankathete von } \alpha}$$

$$\cot \alpha = \frac{1}{\tan \alpha} = \frac{b}{a} = \frac{\text{Ankathete von } \alpha}{\text{Gegenkathete von } \alpha}$$

6 Trigonometrische Formeln



Satz des Pythagoras: $a^2 + b^2 = c^2$

Höhensatz: $h^2 = p \cdot q$ | $\sin \alpha = \frac{h}{b}$ | $\sin \beta = \frac{h}{a}$

Fläche: $A = \frac{a \cdot b}{2} = \frac{h \cdot c}{2}$

Kathetensatz: $a^2 = p \cdot c$ | $b^2 = q \cdot c$

$\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$

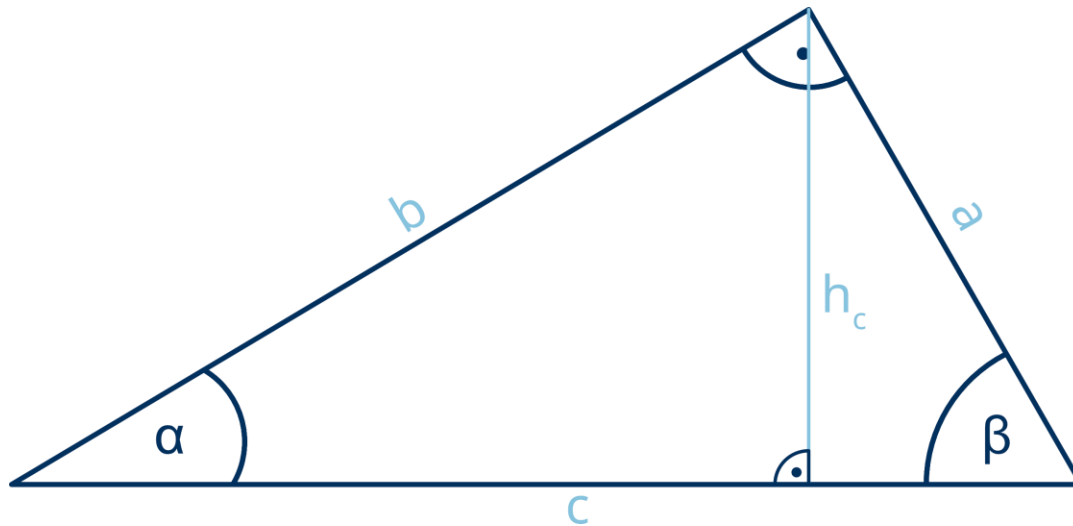
Sinussätze: $\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma}$

6.1 Trigonometrische Formeln – Aufgaben

(gerundet auf drei Nachkommastellen)

1. Vom dargestellten Dreieck sind $\beta = 65^\circ$ und $h_c = 22\text{m}$ bekannt.

Berechnen Sie die Länge a , b und c , den Winkel α und den Flächeninhalt A .



$$\alpha = 25^\circ \quad (\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ)$$

$$a = 24,274 \text{ m} \quad (\sin \beta = \frac{h}{a})$$

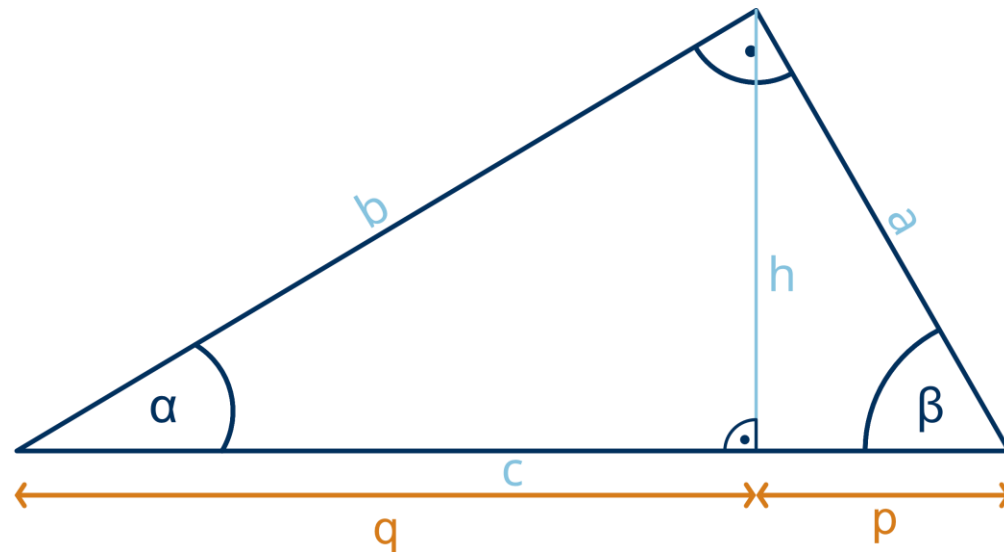
$$b = 52,056 \text{ m} \quad (\tan \alpha = \frac{a}{b})$$

$$c = 57,437 \text{ m} \quad (a^2 + b^2 = c^2)$$

$$A = 631,8 \text{ m}^2 \quad (A = \frac{a \cdot b}{2})$$

6.1 Trigonometrische Formeln – Aufgaben

2. Berechnen Sie jeweils die fehlenden Seiten und Innenwinkel zu den gegebenen Angaben.



a) $p = 4,93 \text{ cm} \mid \beta = 70,3^\circ$

b) $p = 28 \text{ cm} \mid q = 63 \text{ cm}$

c) $a = 12,5 \text{ cm} \mid p = 4,4 \text{ cm}$

d) $h = 9,1 \text{ cm} \mid q = 9 \text{ cm}$

e) $a = 27,8 \text{ cm} \mid A = 373 \text{ cm}^2$

6.1 Trigonometrische Formeln – Aufgaben

(gerundet auf drei Nachkommastellen)

2. Berechnen Sie jeweils die fehlenden Seiten und Innenwinkel zu den gegebenen Angaben.

a) $p = 4,93 \text{ cm} \mid \beta = 70,3^\circ, \alpha = 19,7^\circ, a = 14,625 \text{ cm}, b = 40,847 \text{ cm}, c = 43,386 \text{ cm}$

b) $p = 28 \text{ cm} \mid q = 63 \text{ cm}, c = 91 \text{ cm}, h = 42 \text{ cm}, a = 50,478, b = 75,717, \alpha = 33,69^\circ, \beta = 56,31^\circ$

c) $a = 12,5 \text{ cm} \mid p = 4,4 \text{ cm}, h = 11,7 \text{ cm}, c = 35,511, b = 33,238, \alpha = 20,61^\circ, \beta = 69,39^\circ$

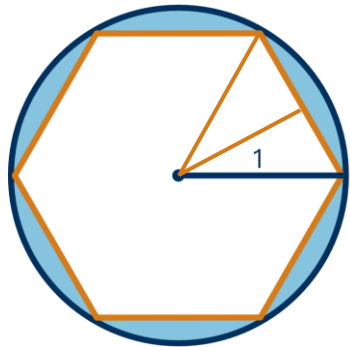
d) $h = 9,1 \text{ cm} \mid q = 9 \text{ cm}, p = 9,201, c = 18,201, b = 12,799, a = 12,941, \alpha = 45,317^\circ, \beta = 44,683^\circ$

e) $a = 27,8 \text{ cm} \mid A = 373 \text{ cm}^2, b = 26,835 \text{ cm}, c = 38,639 \text{ cm}, \alpha = 46,012^\circ, \beta = 43,988^\circ$

6.1 Trigonometrische Formeln – Aufgaben

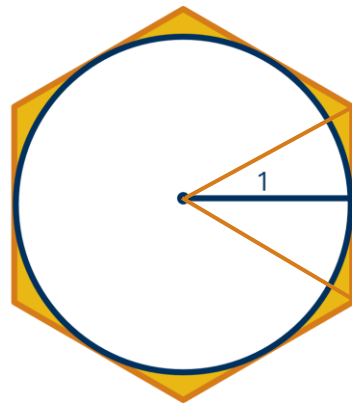
(gerundet auf drei Nachkommastellen)

3. Berechnen Sie jeweils, um wie viel Prozent der Flächeninhalt des Vielecks vom Flächeninhalt des Kreises abweicht.



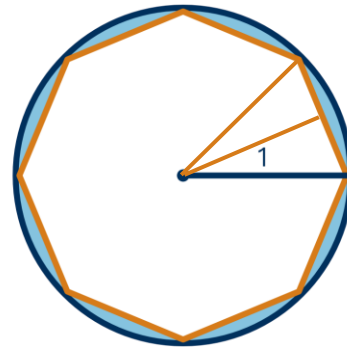
$$h = b_{\text{halb}} = \sqrt{c^2 - a^2}$$
$$h = b = \sqrt{1^2 - 0,5^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$\text{Fläche}_{\text{halb}} = \frac{a \cdot b}{2} = \frac{\sqrt{3}}{8} \cdot 12 = 2,598$$

Abweichung: -17,3%



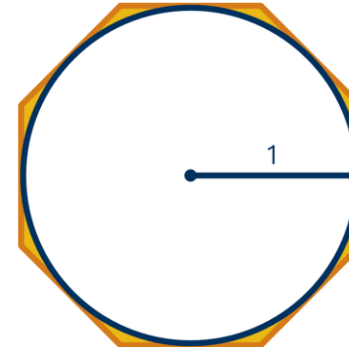
$$a_{\text{halb}} = \tan(30) \cdot 1 = \frac{\sqrt{3}}{3}$$
$$A_{\text{halb}} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{3} \cdot 1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{6} \cdot 12 = 3,464$$

Abweichung: +10,3%



$$a_{\text{halb}} = \sin(22,5^\circ) \cdot 1 = 0,383$$
$$b = \sqrt{1^2 - 0,383^2} = 0,924$$
$$A_{\text{halb}} = \frac{a \cdot b}{2} = \frac{0,383 \cdot 0,924}{2} = 2,831$$

Abweichung: -9,9%



$$A_{\text{Kreis}} = \pi \cdot r^2 = \pi \cdot 1^2 = \pi$$

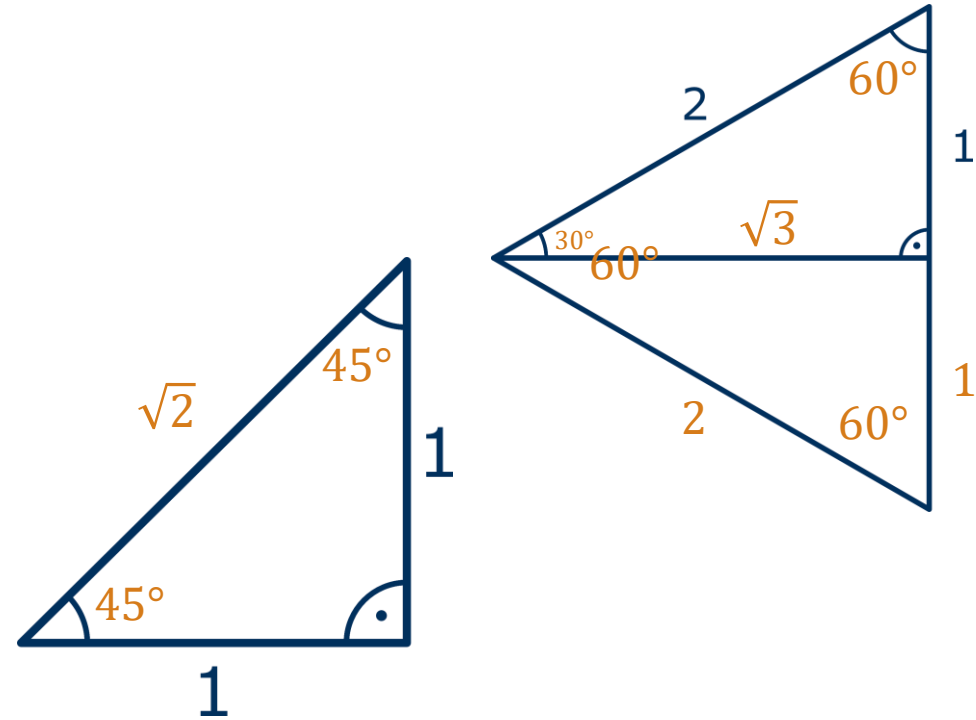
$$a_{\text{halb}} = \tan(22,5^\circ) \cdot 1 = 0,414$$
$$A_{\text{halb}} = \frac{0,414 \cdot 1}{2} = 0,207 \cdot 16 = 3,312$$

Abweichung: +5,4%

6.1 Trigonometrische Formeln – Aufgaben

4. Für die Winkel 30° , 45° und 60° kann man die Werte der Winkelfunktion auch ohne TR ermitteln.
- Ermitteln Sie (ohne TR) die Winkel und Seitenlängen in den beiden Dreiecken.
 - Füllen Sie die Tabelle aus (ohne TR).

	$\alpha = 30^\circ$	$\alpha = 45^\circ$	$\alpha = 60^\circ$
$\sin(\alpha)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\cos(\alpha)$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$
$\tan(\alpha)$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$



6.1 Übungsaufgaben - Trigonometrische Formeln

5. Von einem spitzen Winkel α wissen Sie, dass $\tan(\alpha) = \frac{5}{12}$ gilt. Ermitteln Sie $\sin(\alpha)$ und $\cos(\alpha)$.

$$\sin(\alpha) = \frac{5}{13}, \quad \cos(\alpha) = \frac{12}{13}$$