

# Mathematik Brückenkurs

---

Fachbereich Informatik und Elektrotechnik

# Inhaltsverzeichnis

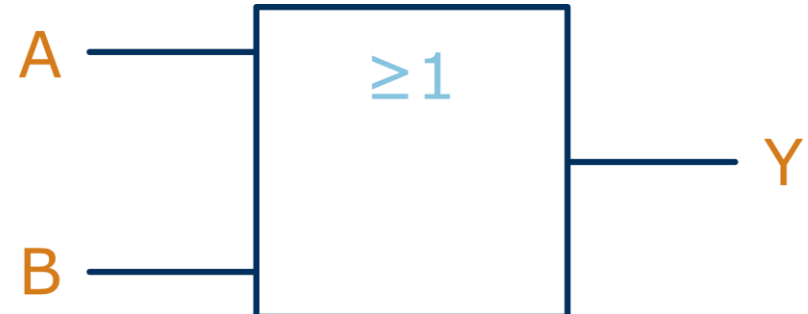
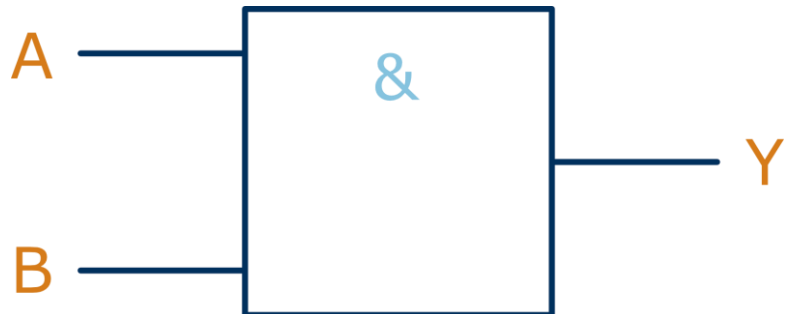
---

1. Elementare Logik
2. Mengen
3. Zahlenmengen
4. Potenzen / Wurzeln / Logarithmen
5. Komplexe Zahlen
6. Gleichungen
7. Trigonometrische Formeln
8. Induktionsbeweise

# 1 Elementare Logik – Motivation

---

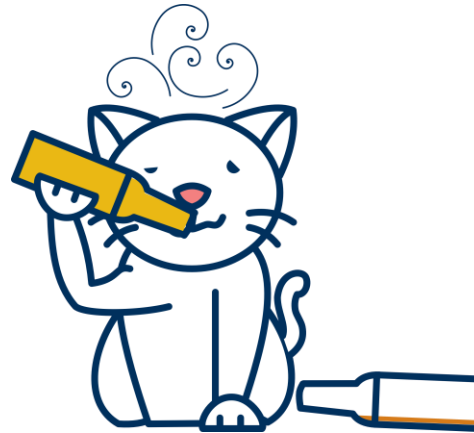
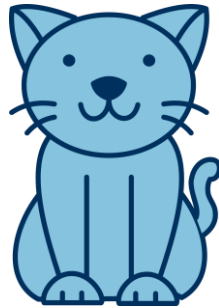
- Fundament unserer Digitalen Welt – An oder Aus, 0 oder 1, Spannung oder keine Spannung.
- Die Grundbausteine eines Computers sind Logikgatter, die nicht viel mehr darstellen können als 0 oder 1.



# 1 Elementare Logik – Definition und Beispiele

---

- Logik ist deterministisch; Sie weißt jeder Aussage entweder die Eigenschaft **wahr** oder **falsch** zu.
- Beispiel 1: Die Aussage  $0 = 1$  ist entweder falsch oder wahr. In diesem Fall ist die Aussage falsch.
- Beispiel 2: Die Katze ist blau; wahr oder falsch?



→ Problematik der Mehrdeutigkeit der Sprache!

# 1.1 Aussagenlogik - Junktoren

- Aussagen können miteinander verknüpft werden.
- Diese Verknüpfungen nennt man Junktoren:

<b>Junktor</b>	<b>Bedeutung</b>	<b>Junktorenzeichen</b>	
Negation	„nicht“	$\neg$	$\bar{\phantom{x}}$
Konjunktion	„und“	$\wedge$	$\cdot$
Disjunktion	„oder“	$\vee$	$+$
Ausschließende Disjunktion	„exklusiv oder“ „xor“	$\oplus$	$\Leftrightarrow$
Implikation	„wenn ... dann“	$\rightarrow$	$\Rightarrow$
Äquivalenz	„genau dann ... wenn“	$\leftrightarrow$	$\Leftrightarrow$

# 1.1.1 Aussagenlogik - Wahrheitstabellen

- Verknüpfte Aussagen lassen sich gut durch ihre Wahrheitstabellen beschreiben:

$A$	$B$	$\bar{A}$	$\bar{B}$	$A \wedge B$	$A \vee B$	$A \oplus B$	$A \rightarrow B$	$A \leftrightarrow B$
W	W	F	F	W	W	F	W	W
W	F	F	W	F	W	W	F	F
F	W	W	F	F	W	W	W	F
F	F	W	W	F	F	F	W	W

# 1.1.2 Aussagenlogik - Beispiele

---

Wir betrachten die folgenden Aussagen:

$A$ : Es ist kalt.

$B$ : Es schneit.

$\bar{A}$  Es ist nicht kalt.

$A \wedge B$  Es ist kalt und es schneit.

$A \vee B$  Es ist kalt oder es schneit oder beides gleichzeitig.

$A \oplus B$  Es ist kalt und es schneit nicht oder es ist nicht kalt und es schneit.

$B \rightarrow A$  Wenn es schneit ist es kalt.  $\rightarrow$  nicht: Wenn es kalt ist schneit es.

$A \leftrightarrow B$  Es schneit genau dann wenn es kalt ist.  $\rightarrow$  Nicht haltbare Aussage!

# 1.2 Prädikatenlogik - Definition

---

- Einige Aussagen haben keinen definitiven Wahrheitswert wie z. B.  $x > 0$  wenn  $x$  noch unbekannt ist, dafür werden Quantoren eingeführt.

Quantor	Bedeutung	Zeichen
Existenzquantor	„Es existiert mindestens ein ...“	$\exists$
Allquantor	„Für alle ...“	$\forall$
Eindeutigkeitsquantor	„Es existiert genau ein ...“	$\exists!$
Anzahlquantor	„Es existieren genau $x$ ...“	$\exists^{=x}$

# 1.2.1 Prädikatenlogik - Beispiele

---

- Alle Katzen sind Säugetiere:

$$\forall x(\text{Katze}(x) \Rightarrow \text{Säugetier}(x))$$

- Es gibt mindestens eine Stadt nördlich von München:

$$\exists x(\text{Stadt}(x) \wedge \text{nördlich}(x, \text{München}))$$

- Nicht alle Autos sind grün:

$$\neg \forall x: \text{Autos}(\text{grün}(x))$$

$$\exists x: \text{Auto}(\text{nicht grün}(x))$$

# 1.3 Logik - Aufgaben

---

1. Bestimmen Sie die Wahrheitswerte der folgenden Aussagen (W = Wahr, F = Falsch)

a)  $W \wedge \bar{F}$    b)  $W \vee (W \rightarrow F)$    c)  $(W \leftrightarrow W) \wedge F$    d)  $(\bar{W} \oplus (F \rightarrow W)) \wedge (W \rightarrow F) \wedge (W \wedge F)$

Lösung

a) W   b) W   c) F   d) F

# 2 Mengen - Motivation

---

- Die Mengenlehre dient der Gliederung und dem Vergleich von Mengen.
- Die Konzepte der Mengenlehre finden Anwendung in der Datenverwaltung, zum Beispiel bei SQL.
- Regelung von Zugriffsrechten

```
SELECT *  
FROM M_1  
WHERE id NOT IN (  
    SELECT id FROM (  
        SELECT id FROM M_1  
        INTERSECT  
        SELECT id FROM M_2  
        UNION  
        SELECT id FROM M_3  
    ) AS Subquery  
);
```

# 2 Mengen - Definition

---

- Eine Menge ist ein abstraktes Objekt, bestehend aus wohl unterschiedenen Elementen.
- Im Allgemeinen kann alles ein Element einer Menge sein, so auch andere Mengen.
- Häufig ist es hilfreich Zahlen in Mengen zusammenzufassen:

$$M = \{2, 3, 5, 7\}$$

- Kennzeichnung der Elemente:  $2 \in M$ , 2 ist Element von M  
 $4 \notin M$ , 4 ist nicht Element von M

# 2.1 Mengen - Darstellungsformen

---

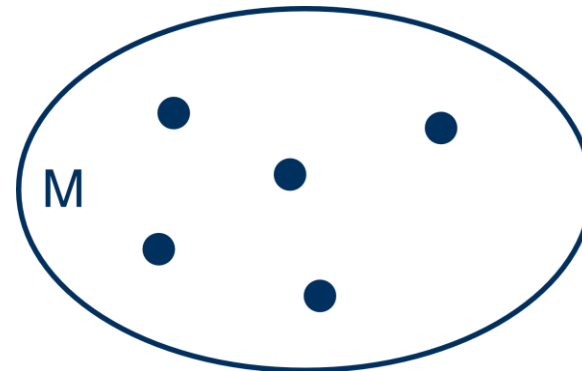
• Aufzählend:  $M = \{2, 3, 5, 7\}$

• Beschreibend:  $M = \{x \mid \text{Eigenschaften der Elemente } x\},$

Beispiel:  $M = \{x \mid x \in \mathbb{N} \wedge x < 6\} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$

• Leere Menge:  $M = \{\} = \emptyset$

• Graphische Darstellung:

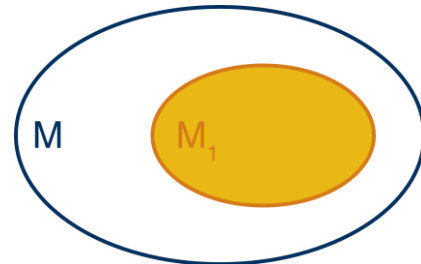


## 2.2.1 Mengenrelationen - Teilmenge

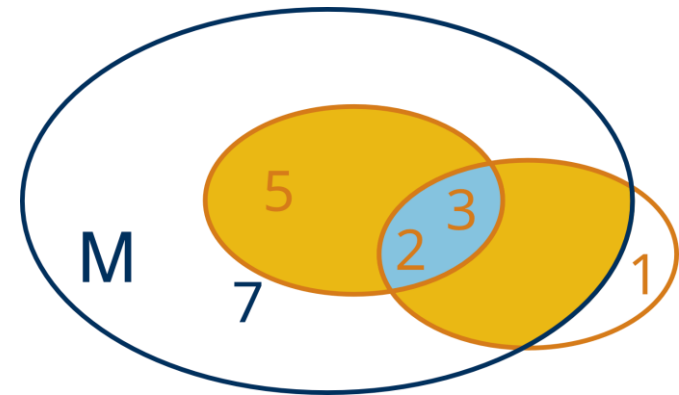
- Definition:  $M_1$  ist Teilmenge von  $M$ , wenn jedes Element von  $M_1$  auch Element von  $M$  ist.

- Schreibweise:  $M_1 \subset M$ , bzw.  $M_2 \not\subset M$

- Venn-Diagramm:



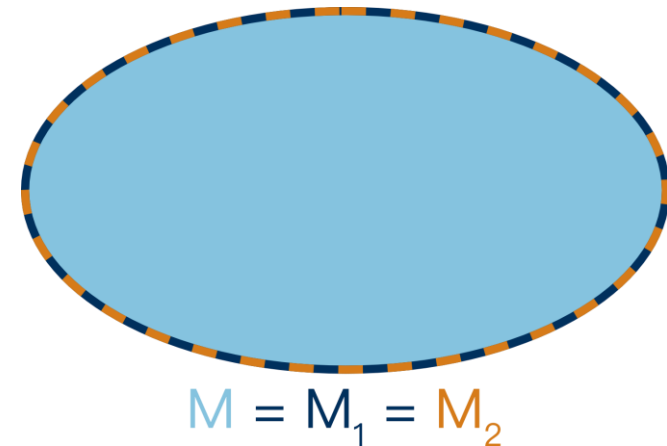
- Beispiele:  $M = \{2, 3, 5, 7\}$ ,  $M_1 = \{2, 3, 5\}$ ,  $M_2 = \{1, 2, 3\}$



## 2.2.2 Mengenrelationen - Gleichheit

---

- Definition: Zwei Mengen heißen genau gleich, wenn beide Mengen die gleichen Elemente enthalten.
- Schreibweise:  $M_1 = M$ , bzw.  $M_2 = M$
- Venn-Diagramm:
- Beispiele:  $M_1 = \{2, 3, 5, 7\}$ ,  $M_2 = \{2, 3, 5, 7\}$



## 2.2.3 Mengenoperationen - Vereinigung

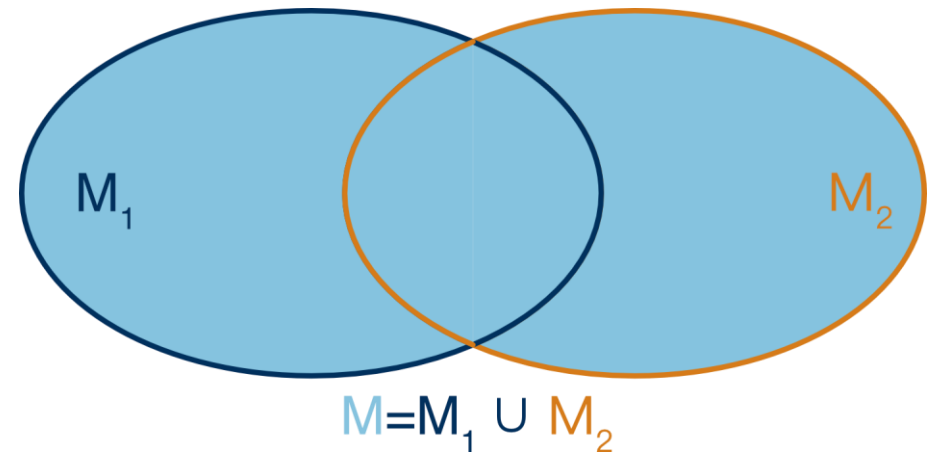
- Definition: Die Vereinigung zweier Mengen  $M$  enthält diejenigen Elemente, die in mindestens einer der beiden vereinigten Mengen  $M_1$  und  $M_2$  enthalten ist.

- Schreibweise:  $M = M_1 \cup M_2$ , bzw.  $M = \{x \mid x \in M_1 \vee x \in M_2\}$

- Venn-Diagramm:

- Beispiele:  $M_1 = \{2, 3, 5, 7\}$ ,  $M_2 = \{4, 9, 1\} = \{1, 4, 9\}$

$$M = M_1 \cup M_2 = \{1, 2, 3, 4, 5, 7, 9\}$$



## 2.2.4 Mengenoperationen – Durchschnitt (Schnitt)

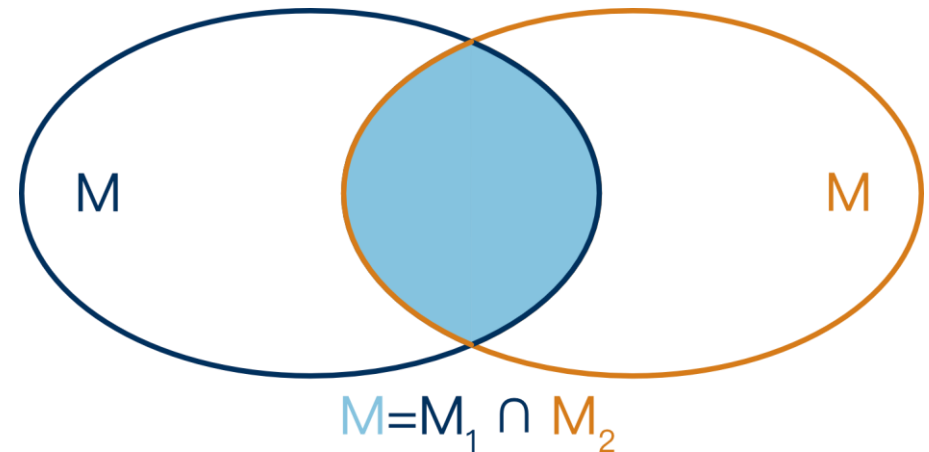
- 
- Definition: Der Durchschnitt zweier Mengen  $M$  enthält diejenigen Elemente, die in beiden Mengen  $M_1$  und  $M_2$  enthalten sind.

- Schreibweise:  $M = M_1 \cap M_2$ , bzw.  $M = \{x \mid x \in M_1 \wedge x \in M_2\}$

- Venn-Diagramm:

- Beispiele:  $M_1 = \{1, 3, 6, 8\}$ ,  $M_2 = \{4, 6, 8\}$

$$M = M_1 \cap M_2 = \{6, 8\}$$



## 2.2.5 Mengenoperationen – Differenz

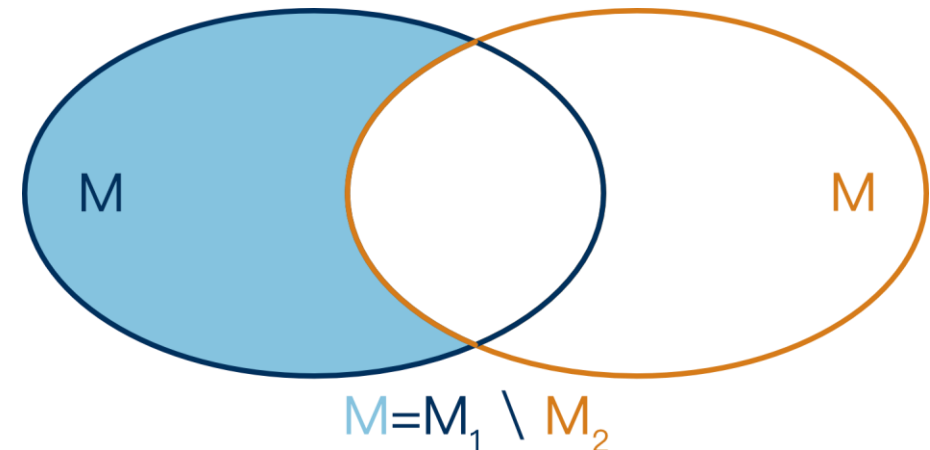
- Definition: Die Differenz zweier Mengen  $M_1$  und  $M_2$  enthält diejenigen Elemente, die in  $M_1$ , aber nicht in  $M_2$  enthalten sind.

- Schreibweise:  $M = M_1 \setminus M_2$ , bzw.  $M = \{x \mid x \in M_1 \wedge x \notin M_2\}$

- Venn-Diagramm:

- Beispiele:  $M_1 = \{2, 3, 5, 7\}$ ,  $M_2 = \{2, 3, 4\}$

$$M = M_1 \setminus M_2 = \{5, 7\}$$



## 2.2.7 Mengenoperationen – Kardinalität

---

- Definition: Die Kardinalität oder Mächtigkeit einer Menge gibt die Anzahl der Elemente einer Menge an.
- Schreibweise:  $|M| = x$
- Beispiele:
  - $M_1 = \{2, 3, 5, 7, 11, 13\} \Rightarrow |M_1| = 6$
  - $M_2 = \{0, 3, 9\} \Rightarrow |M_2| = 3$
  - $M_3 = \{\} \Rightarrow |M_3| = 0$

## 2.2.6 Intervalle

---

- Definition: Intervalle sind Teilmengen von  $\mathbb{R}$ , die durch zwei Randpunkte begrenzt werden

- Endliche Intervalle ( $a < b$ ) / Andere Schreibweise

$$[a, b] = \{x \mid a \leq x \leq b\}$$

$$[a, b) = \{x \mid a \leq x < b\}$$

$$(a, b] = \{x \mid a < x \leq b\}$$

$$(a, b) = \{x \mid a < x < b\}$$

$$[a, b] = \{x \mid a \leq x \leq b\}$$

$$[a, b[ = \{x \mid a \leq x < b\}$$

$$]a, b] = \{x \mid a < x \leq b\}$$

$$]a, b[ = \{x \mid a < x < b\}$$

- Unendliche Intervalle

$$[a, \infty) = \{x \mid a \leq x < \infty\}$$

$$(a, \infty) = \{x \mid a < x < \infty\}$$

$$(-\infty, b) = \{x \mid -\infty < x < b\}$$

$$(-\infty, \infty) = \mathbb{R}$$

- Beispiel:  $[1, 5[ = \{x \mid 1 \leq x < 5\}$

## 2.3 Mengen – Aufgaben

---

1. Gegeben sein die drei Mengen:  $A = \{-3, -1, 2, 4\}$ ,  $B = \{3, 4, 5, 6\}$  und  $C = \{-1, 5, 7, 8\}$  berechnen Sie:

a)  $A \cap B$    b)  $A \cup B$    c)  $B \setminus C$    d)  $C \setminus B$    e)  $A \setminus (B \cap C)$    f)  $A \cap \mathbb{N}$

a)  $\{4\}$    b)  $\{-3, -1, 2, 3, 4, 5, 6\}$    c)  $\{3, 4, 6\}$    d)  $\{-1, 7, 8\}$    e)  $A$    f)  $\{2, 4\}$

2. Geben Sie die folgenden Mengen möglichst einfach an

a)  $[1; 2] \setminus ]1; 2[$    b)  $[1; 2] \setminus \{1, 2\}$    c)  $]1; 2[ \setminus [1; 2]$    d)  $\{x \in \mathbb{R} \mid |x| \geq 1\}$

a)  $\{1, 2\}$    b)  $]1; 2[$    c)  $\emptyset$    d)  $\mathbb{R} \setminus ]-1; 1[$

## 2.3 Mengen – Aufgaben

---

3. Definieren Sie folgende Mengen  $M$  für deren Elemente  $x$

- a)  $x$  liegen in der Menge  $M_1$  oder Menge  $M_2$  aber nicht in der Schnittmenge  $M_1 \cap M_2$
- b)  $x$  liegen in der Menge  $M_1$  oder  $M_2$  aber nicht in der Menge  $M_3$
- c)  $x$  liegen in der Menge  $M_1$  aber nicht in der Schnittmenge von  $M_1$  und  $M_2$ , und auch nicht in der Menge  $M_3$

a)  $M = (M_1 \cup M_2) \setminus (M_1 \cap M_2)$     b)  $M = (M_1 \cup M_2) \setminus M_3$     c)  $M = M_1 \setminus ((M_1 \cap M_2) \cup M_3)$

4. Vereinfachen Sie folgende Ausdrücke

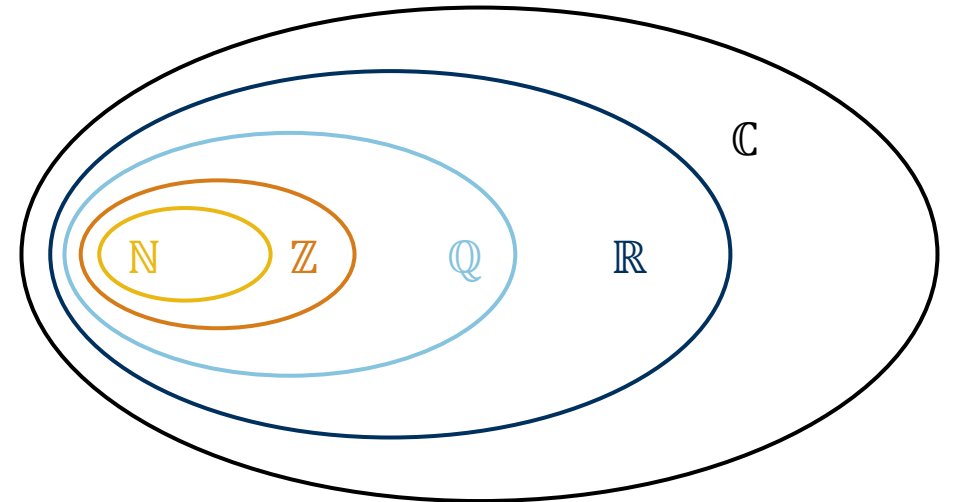
a)  $A \cup (A \setminus B)$     b)  $A \cap (A \setminus B)$     c)  $A \setminus (A \cup B)$     d)  $B \cup (A \setminus B)$     e)  $A \setminus (B \setminus A)$     f)  $A \setminus (A \setminus B)$

a)  $A$     b)  $A \setminus B$     c)  $\emptyset$     d)  $A \cup B$     e)  $A$     f)  $A \cap B$

# 3 Zahlenmengen - Motivation

---

- „Die ganzen Zahlen hat der liebe Gott gemacht, alles andere ist Menschenwerk.“ Leopold Kronecker
- Die Entwicklung der Zahlenmengen spiegelt die Entwicklung der Mathematik wider.
- Die Grundidee der Zahlenmengen findet sich in den Datentypen (bei statisch typisierten Programmiersprachen) in der Informatik wieder.
- Bei der Digitalisierung von z. B. Fotos werden Farbwerte von reellen Zahlen zu natürlichen Zahlen.



# 3 Natürliche Zahlen - Definition

---

- Die Natürlichen Zahlen sind alle positiven ganzen Zahlen.
- Es ist nicht eindeutig definiert, ob die 0 dazu gehört.

- Bezeichnung:  $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$   $\mathbb{N}^* = \mathbb{N} \setminus \{0\} = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$

# 3.1.1 Natürliche Zahlen – Addition (+)

---

- unbeschränkt ausführbar:  $a \in \mathbb{N} \wedge b \in \mathbb{N} \Rightarrow c = a + b \in \mathbb{N}$

- Kommutativität:  $a + b = b + a$

- Assoziativität:  $a + (b + c) = (a + b) + c$

- Monotonie:  $a < b \Rightarrow a + c < b + c$

## 3.1.2 Natürliche Zahlen – Multiplikation ( $\cdot$ )

---

• Definition:  $a \cdot b = \underbrace{a + a + a + a + \dots + a}_{b\text{-mal}}$  oder  $a \cdot b = \underbrace{b + b + b + b + \dots + b}_{a\text{-mal}}$

• unbeschränkt ausführbar:  $a \in \mathbb{N} \wedge b \in \mathbb{N} \Rightarrow c = a \cdot b \in \mathbb{N}$

• Kommutativität:  $a \cdot b = b \cdot a$

• Assoziativität:  $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$

• Monotonie:  $a < b \Rightarrow a \cdot c < b \cdot c$

• Distributivität:  $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$  (Ausklammern)

## 3.1.3 Natürliche Zahlen – Subtraktion (-)

---

- Bei der Subtraktion handelt es sich um die Umkehrung der Addition.
- **beschränkt** ausführbar:  $b \leq a \Rightarrow c = a - b \in \mathbb{N}$

## 3.1.4 Natürliche Zahlen – Division (÷)

---

- Bei der Division handelt es sich um die Umkehrung der Multiplikation.
- **sehr beschränkt** ausführbar:  $b$  ist Teiler von  $a \Rightarrow c = \frac{a}{b} \in \mathbb{N}$
- Division durch 0 ist nicht möglich.

## 3.2 Ganze Zahlen - Definition

---

- Die Ganzen Zahlen erweitern die Natürlichen Zahlen um die negativen Zahlen.
- Motivation: Beschränktheit der Subtraktion.
- Bezeichnung:  $\mathbb{Z} = \{\dots, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$
- Die Natürlichen Zahlen sind Teilmenge der Ganzen Zahlen:  $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$

## 3.2.1 Ganze Zahlen – Vorzeichenregeln und Absolutbetrag

---

- Vorzeichenregeln:  $a + (-a) = 0$   $a - (-b) = a + b$   
 $-(-a) = a$   $a \cdot (-b) = -a \cdot b$
- Absolutbetrag:  $0 < |a| = \begin{cases} a, & \text{falls } a \geq 0 \\ -a, & \text{falls } a < 0 \end{cases}$
- Folgerungen:  $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$   $|a + b| \leq |a| + |b|$

## 3.2.2 Ganze Zahlen – Rechenoperationen

---

- Addition, Multiplikation und Subtraktion sind analog zu den Natürlichen Zahlen unbeschränkt ausführbar.
- Es gelten die Kommutativität, Assoziativität und Distributivität.
- Nur die Division ist beschränkt ausführbar.

# 3.3 Rationale Zahlen - Definition

---

- Die Rationalen Zahlen erweitern die Natürlichen Zahlen um Zahlen, die als Bruch dargestellt werden können.
- Motivation: Beschränktheit der Division.
- Bezeichnung:  $\mathbb{Q} = \left\{ x \mid x = \frac{a}{b}, a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{N}^* \right\}$

# 3.3.1 Rationale Zahlen – Rechenoperationen

---

- Addition:  $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d + b \cdot c}{b \cdot d} \in \mathbb{Q}$
- Subtraktion:  $\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d - b \cdot c}{b \cdot d} \in \mathbb{Q}$
- Multiplikation:  $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d} \in \mathbb{Q}$
- Division:  $\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c} \in \mathbb{Q}$

# 3.4 Reelle Zahlen - Definition

---

- Die Reellen Zahlen erweitern die Rationalen Zahlen um Zahlen, die nicht als Bruch dargestellt werden können (z. B.  $\sqrt{2}$ ).
- Motivation: Unvollständigkeit der Rationalen Zahlen ( $\mathbb{R}$  ist vollständig).
- Bezeichnung:  $\mathbb{R}$

# 3.5 Binomische Formeln

---

- Die **binomischen Formeln** sind in der Algebra verbreitete Formeln, die zur Umformung von Produkten aus Binomen angewendet werden.
- Ein Binom ist ein mathematischer Ausdruck, der aus zwei Gliedern besteht, die addiert oder subtrahiert werden (z. B.  $(a + b)$  oder  $(a - b)$  ).
- Man unterscheidet drei binomische Formeln:

1.  $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

2.  $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

3.  $(a + b) \cdot (a - b) = a^2 - b^2$


## 3.5 Binomische Formeln


---

- Durch „Rückwärtsanwendung“ lassen sich binomische Formeln häufig zur Vereinfachung von Termen einsetzen.
- Dies ist häufig der Fall, wenn in einem Ausdruck 2 Quadratzahlen vorkommen:
  - $(4 - 9) = (2 + 3) \cdot (2 - 3)$
  - $(4 + 12 + 9) = (2 + 3)^2$

# 3.5 Binomische Formeln

$$(a+b)^1 = a + b$$


$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$


$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$


## 3.5 Binomische Formeln

---

- Es kann auch eine andere Potenz eines Binoms gebildet werden:

- $$(a + b)^3 = 1 \cdot a^3 + 3 \cdot a^2 \cdot b + 3 \cdot a \cdot b^2 + 1 \cdot b^3$$

- $$(a + b)^4 = 1 \cdot a^4 + 4 \cdot a^3 \cdot b + 6 \cdot a^2 \cdot b^2 + 4 \cdot a \cdot b^3 + 1 \cdot b^4$$

- $$(a + b)^5 = 1 \cdot a^5 + 5 \cdot a^4 \cdot b + 10 \cdot a^3 \cdot b^2 + 10 \cdot a^2 \cdot b^3 + 5 \cdot a \cdot b^4 + 1 \cdot b^5$$

- ...

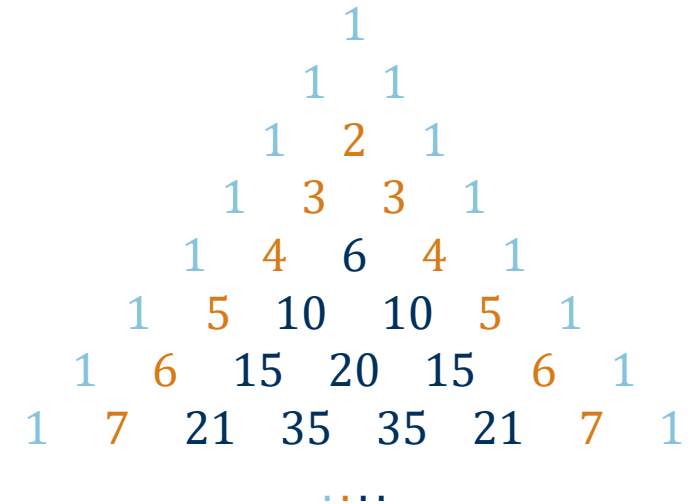
# 3.5 Binomische Formeln

- Es ergibt sich bei den Koeffizienten ein Muster (Pascalsches Dreieck):

- Für die Berechnung der Koeffizienten gibt es eine Rechenvorschrift:

$$\binom{n}{k}, \text{ sprich: } n \text{ über } k$$

mit  $n :=$  Zeile und  $k :=$  Spalte



- Aufgrund der Beziehung:  $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$  ist jede Zahl im Inneren des Dreiecks die Summe der beiden unmittelbar über ihr stehenden.

# 3.5 Binomialkoeffizient

---

- $\binom{n}{k}$  ist der Binomialkoeffizient mit  $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$
- $n!$  ( $n$ -Fakultät) =  $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot \dots \cdot n$
- Es gilt somit für den Binomialkoeffizienten (mit  $(n \in \mathbb{N}^*, k \in \mathbb{N}; n \geq k)$ ):

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! (n - k)!}$$

- $\binom{5}{2} = \frac{5!}{2!(5-2)!} = \frac{5!}{2! \cdot 3!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3} = \frac{120}{12} = 10$

# 3.5 Anwendung Binomische Formeln:

## Quadratische Ergänzung

---

- Ziel: Überführung einer quadratischen Funktion in die Scheitelpunktform, Lösen von quadratischen Gleichungen.
- Term, in dem Variable quadratisch vorkommt, wird in ein Binom umgewandelt.
- $f(x) = 8x^2 + 112x + 396 \rightarrow$  Scheitelpunktform:  $f(x) = a(x - d)^2 + e$

$$\begin{aligned} &= 8x^2 + 112x + 396 \\ &= 8(x^2 + 14x + 49,5) \\ &= 8(x^2 + 2 * 7x + 7^2 - 7^2 + 49,5) \\ &= 8((x^2 + 2 * 7x + 7^2) - 49 + 49,5) \\ &= 8((x^2 + 14x + 7^2) + 0,5) \\ &= 8(x^2 + 14x + 7^2) + 4 \\ &= 8(x + 7)^2 + 4 \end{aligned}$$

## 3.6 Zahlenräume – Aufgaben

---

1. Begründen Sie, ob die Gleichung für alle reellen Zahlen richtig ist.

- |  |         |
|--|---------|
| a) $a - b + c = -b + a + c$                        | a) Ja   |
| b) $a + b - c + d - e = a + b + d - c - e$         | b) Ja   |
| c) $x + y - z = x + z - y$                         | c) Nein |
| d) $x \cdot y \cdot z = y \cdot z \cdot x$         | d) Ja   |
| e) $e \cdot f - g \cdot h = g \cdot h - f \cdot e$ | e) Nein |
| f) $r \cdot s + t \cdot u = u \cdot t + s \cdot r$ | f) Ja   |
| g) $m + n \cdot l = m \cdot n + l$                 | g) Nein |

# 3.6 Zahlenräume – Aufgaben

---

2. Vereinfachen Sie die Terme.

a)  $7a - [3a - (7 + 5b)] + [a - (4 - 6b)] - (2a + 7b) =$

a)  $3a + 3 + 4b$

b)  $(a + b - c) \cdot (a - b - c) =$

b)  $a^2 - 2ac - b^2 + c^2$

c)  $(49a^2 + 42a + 9) =$

c)  $(7a + 3)^2$

d)  $(144a^4 - 81b^2) \div (27b + 36a^2) =$

d)  $4a^2 - 3b$

e)  $3 \cdot (a + b + c) - 5 \cdot (a + b) - c - 2 \cdot (b - c - a) =$

e)  $4(c - b)$

f)  $\frac{5}{18} + \frac{5}{6} - \frac{1}{3} + \frac{14}{27} + \frac{71}{81} =$

f)  $\frac{176}{81}$

g)  $\frac{a}{a-1} + \frac{a}{a+1} - 2 =$

g)  $\frac{2}{a^2-1}$

h)  $\frac{1-\frac{1}{a}}{\frac{1}{a}-\frac{1}{a^2}} =$

h)  $a$

## 3.6 Zahlenräume – Aufgaben

---

3. Berechnen Sie ohne Benutzung des Taschenrechners und ohne Benutzung von gemischten Zahlen (gemischte Zahl =  $1\frac{1}{2}$ ).

a)  $\frac{2}{3} + \frac{1}{6}$

b)  $\frac{9}{7} - \frac{16}{49}$

c)  $\frac{1}{5} + \frac{3}{8}$

a)  $\frac{5}{6}$

b)  $\frac{47}{49}$

c)  $\frac{23}{40}$

d)  $\frac{2}{3} + \frac{3}{4}$

e)  $\frac{5}{18} - 2$

f)  $3 + \frac{19}{8}$

d)  $\frac{17}{12}$

e)  $-\frac{31}{18}$

f)  $\frac{43}{8}$

g)  $\frac{2}{9} - \frac{5}{6}$

h)  $\frac{7}{16} + \frac{11}{24}$

i)  $\frac{11}{4} + \frac{5}{6}$

g)  $-\frac{11}{18}$

h)  $\frac{43}{48}$

i)  $\frac{43}{12}$

j)  $\frac{16}{5} - \frac{7}{3}$

k)  $\frac{3}{8} + \frac{6}{12} - \frac{2}{3}$

l)  $\frac{3}{20} - \frac{4}{24} + \frac{31}{18}$

j)  $\frac{13}{15}$

k)  $\frac{5}{24}$

l)  $\frac{307}{180}$

# 3.6 Zahlenräume – Aufgaben

---

4. Zusätzlich kürzen, wenn möglich.

$$a) \frac{4}{6} \cdot \frac{9}{2}$$

$$b) 7 \cdot \frac{6}{56}$$

$$c) \frac{12}{25} \cdot \frac{35}{18}$$

$$a) 3$$

$$b) \frac{3}{4}$$

$$c) \frac{14}{15}$$

$$d) \frac{64}{49} \div \frac{40}{21}$$

$$e) \frac{\frac{32}{33}}{\frac{80}{77}}$$

$$f) \frac{\frac{25}{6}}{35}$$

$$d) \frac{24}{35}$$

$$e) \frac{14}{15}$$

$$f) \frac{5}{42}$$

$$g) \frac{40}{\frac{8}{9}}$$

$$h) \frac{4}{15} \cdot \frac{\frac{6}{12}}{\frac{18}{25}}$$

$$i) \frac{5}{4} - \frac{4}{3} \cdot \frac{\frac{3}{8} + \frac{5}{6}}{\frac{1}{4}}$$

$$g) 45$$

$$h) \frac{5}{27}$$

$$i) -\frac{187}{36}$$

$$j) \frac{4}{14} \cdot \frac{\frac{3}{8}}{\frac{6}{7} - \frac{5}{8}} - \frac{3}{2}$$

$$k) 3 \cdot \frac{\frac{3}{36}}{\frac{3}{35}} \cdot \frac{\frac{4}{3}}{7} - 3$$

$$j) -\frac{27}{26}$$

$$k) -\frac{4}{3}$$

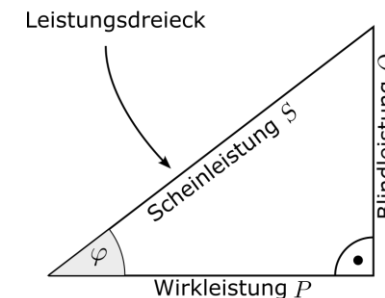
# 4.1 Potenzen / Wurzeln / Logarithmen

- Potenzen, Wurzeln und Logarithmen stellen wichtige grundlegende Rechenoperationen dar.
- Unser Zahlensystem (Dezimal) basiert auf Potenzen zur Basis 10.

$$\sqrt[2]{16} = 4 \Leftrightarrow 4^2 = 16 \Leftrightarrow \log_4 16 = 2$$

- Algorithmen werden so designt, dass die Komplexität logarithmisch und nicht linear ist.

Zusammenhang Scheinleistung,  
Blindleistung und Wirkleistung



Satz des Pythagoras

$$S = \sqrt{P^2 + Q^2}$$

Produkt der Effektivwerte  
von Spannung und Strom

$$S = U \cdot I$$

Trigonometrie

$$P = S \cdot \cos(\varphi)$$

# 4.1 Potenzen

---

- Eine Potenz ist im eigentlichen Sinne lediglich eine abkürzende Schreibweise von Multiplikationen, ebenso wie Multiplikation eine abkürzende Schreibweise der Addition ist.

$$4 + 4 + 4 + 4 + 4 = 5 \cdot 4$$

$$4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 = 1024 = 4^5$$

- Hierbei ist 4 die **Basis**, 5 der **Exponent** und 1024 das **Ergebnis**.

# 4.1 Potenzen

---

Durch Herunterzählen von Potenzen ergibt sich folgendes:  $2^4 = 16$

$: 2 \downarrow$

$$2^3 = 8$$

$: 2 \downarrow$

$$2^2 = 4$$

$: 2 \downarrow$

$$2^1 = 2$$

$: 2 \downarrow$

$$2^0 = 1$$

$: 2 \downarrow$

$$2^{-1} = \frac{1}{2}$$

$: 2 \downarrow$

$$2^{-2} = \frac{1}{2^2}$$

- Potenzen mit Exponenten 0 sind grundsätzlich = 1  
(Ausnahme:  $0^0$  ist nicht definiert.  $0^1$  hingegen schon.)

# 4.1.1 Potenzen - Rechengesetze

---

- Potenzen mit gleicher Basis:

$$a^n \cdot a^m = a^{n+m}$$

- Potenzen mit ungleicher Basis, aber gleichem Exponenten:

$$a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$$

- Potenzen von Potenzen:

→ In der Regel gilt:  $(a^n)^m \neq a^{n^m}$

$$(a^n)^m = a^{n \cdot m}$$

# 4.1.1 Potenzen - Rechengesetze

---

- Potenzen von Brüchen mit ungleicher Basis, aber gleichem Exponenten:

$$\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$$

- Potenzen von Brüchen mit gleicher Basis, aber ungleichem Exponenten:

$$\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$$

- Negative Potenzen:

$$a^{-m} = \frac{1}{a^m}$$

# 4.1.2 Potenzen – Aufgaben

---

1. Vereinfachen Sie so weit wie möglich und geben Sie jeweils an, welches Potenzgesetz Sie anwenden.

a)  $x^2 \cdot x^3$

b)  $y \cdot y^2 \cdot y^4$

a)  $x^5$

b)  $y^7$

c)  $z^7 \cdot z^{-2} \cdot z^5$

d)  $\frac{x^6}{x^3}$

c)  $z^{10}$

d)  $x^3$

e)  $\frac{x^4}{x^{-7}}$

f)  $\frac{x^{-2} \cdot x^6}{x^8}$

e)  $x^{11}$

f)  $\frac{1}{x^4}$

g)  $\frac{(a+b)^3}{(a+b)^4} \cdot (a+b)^5$

g)  $(a+b)^4$

h)  $-x^4 \cdot y^5 \cdot (x^3y^4 - x^{-3}y^2)$

h)  $-x^7y^9 + xy^7$

i)  $(2x^4 + 3y^2)(4x^{-2} + 6y^4)$

i)  $8x^2 + 12x^4y^4 + 12x^{-2}y^2 + 18y^6$

j)  $(x^2y + x^{-3}y^4)(x^5y^{-2} + x^6)$

j)  $x^7y^{-1} + x^8y + x^2y^2 + x^3y^4$

# 4.1.2 Potenzen – Aufgaben

---

2. Vereinfachen und eliminieren Sie dabei die negativen Exponenten.

a)  $(x^2)^3 \cdot (2^2)^2$

b)  $((x^4)^3)^2 \cdot (x^2)^2$

c)  $((xy)^3)^2 \cdot x^4 \cdot y^{-2}$

d)  $\frac{\left(\frac{x}{y}\right)^2}{x^4 y^{-5}}$

e)  $\frac{(x^2)^{-3} ((x+y)^2)^3}{(x+y)^5}$

f)  $(x^2 y^3)^4 \cdot x^{-3} y^2$

a)  $16x^6$

b)  $x^{28}$

c)  $x^{10} y^4$

d)  $\frac{x^2}{y}$

e)  $\frac{(x+y)}{x^6}$

f)  $x^5 y^{14}$

# 4.1.2 Potenzen – Aufgaben

---

2. Vereinfachen und eliminieren Sie dabei die negativen Exponenten.

$$g) \frac{(x^3y^2)^3}{(x^4y^3)^2}$$

$$h) \left(\frac{x^2}{y^{-3}}\right)^5 \cdot x^4y^3$$

$$i) \frac{\left(\frac{x^{-3}}{y^2}\right)^4}{\left(\frac{x^4}{y^5}\right)^2}$$

$$j) \left(\frac{x^2y^3}{z^4}\right)^2 \cdot \left(\frac{y}{x^{-2}z^4}\right)^{-3}$$

$$k) \frac{x^3(y^4z^2)^{-2}}{(x^2y^3z^2)^4} \cdot \left(\frac{x^4}{y^5z^3}\right)^{-2}$$

$$g) x$$

$$h) x^{14}y^{18}$$

$$i) \frac{y^2}{x^{20}}$$

$$j) \frac{y^3z^4}{x^2}$$

$$k) \frac{1}{x^{13}y^{10}z^6}$$

# 4.1.2 Potenzen – Aufgaben

---

3. Lösen Sie folgende Terme:

a)  $\frac{a^{7x+5y}}{a^{4x-5y}} - \frac{a^{6y+8x}}{a^{5x-4y}} =$

a) 0

b)  $6 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)^3 + 5 \left(-\frac{2}{3}\right)^2 =$

b) 2

c)  $\left(\frac{x^3}{y^{-1}}\right)^{-2} \cdot \frac{x^5}{y^{-3}} =$

c)  $\frac{y}{x}$

d)  $\frac{1-2x^2}{x^n} - \frac{3x-2}{x^{n-2}} + \frac{3}{x^{n-3}} =$

d)  $\frac{1}{x^n}$

e)  $a^{x+y} \cdot a^{x-y} =$

e)  $a^{2x}$

## 4.2 Wurzeln - Definition

---

- Bisher: Probleme der Form:  $a^b = c$  mit gegebenen  $a, b \in \mathbb{R}$
- Nun: Lösung von Problemen der Form:  $a^b = c$  mit gegebenen  $b, c \in \mathbb{R}$ , z. B.  $a^3 = 8$
- Durch Einführung des Wurzeloperators lässt sich das Problem umformulieren:  $\sqrt[3]{8} = a$   
Die Wurzel beantwortet somit die Frage, was 3-mal mit sich selbst genommen 8 ergibt.
- Begrifflichkeiten:  $c$  wird als **Radikand**,  $b$  als **Wurzelexponent** bezeichnet.

## 4.2 Wurzeln - Definition

---

- Bei Quadratwurzeln ( $b = 2$ ) wird der Wurzelexponent in der Regel nicht angegeben:

$$\sqrt[2]{9} = \sqrt{9} = 3$$

- Je nach Aufgabenstellung und nach realen Problemen wird nicht nur die positive Lösung gesucht. Da Potenzen bei graden Exponenten immer positiv sind (zumindest im reellen), besitzt  $\sqrt{9}$  noch die weitere Lösung  $-3$ . Damit gilt:

$$\sqrt{9} = \pm 3$$

## 4.2 Wurzeln - Definition

---

- Im reellen Zahlenraum sind Wurzeln von negativen Radikanden nicht definiert.  $\sqrt{-3}$  besitzt beispielsweise keine reelle Lösung.
- Es gibt jedoch Lösungen im komplexen Zahlenraum  $\mathbb{C} \rightarrow$  Kapitel 5

# 4.2.1 Wurzeln - Rechenregeln

---

- Für alle Rechenregeln gilt:  $m, n \in \mathbb{N}^*$ ,  $a, b \geq 0$

$$\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$$

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}, \quad (b > 0)$$

$$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$$

$$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[m \cdot n]{a}$$

# 4.2.1 Wurzeln – Aufgaben

---

1. Vereinfachen Sie den Term und schreiben Sie nicht ganzzahligen Exponenten wieder als Wurzel.

$$a) \frac{a^{\frac{1}{2}} \cdot a^{\frac{2}{3}} \cdot a^{\frac{1}{4}}}{b^{\frac{2}{5}}}$$

$$b) \left(a^{\frac{1}{2}} b^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}} \cdot \left(a^{-\frac{1}{4}}\right)^2$$

$$a) \frac{\sqrt[12]{a^{17}}}{\sqrt[5]{b^2}}$$

$$b) \sqrt[4]{a} \cdot b$$

$$c) \sqrt[3]{a} \cdot \sqrt{b} \cdot \sqrt[4]{a} \cdot \sqrt[5]{b}$$

$$d) \frac{\sqrt{a} \cdot \sqrt{a^3}}{\sqrt[3]{a}}$$

$$c) \sqrt[12]{a^7} \cdot \sqrt[10]{b^7}$$

$$d) \sqrt[3]{a^5}$$

$$e) \frac{\sqrt[3]{x^2} \cdot x^2}{\sqrt[4]{25x^3}}$$

$$f) \sqrt{ab} \cdot \sqrt[3]{27ab}$$

$$e) \frac{\sqrt[12]{x^{23}}}{\sqrt{5}}$$

$$f) 3 \cdot \sqrt[6]{a^5 b^5}$$

$$g) \sqrt{4a^2 b^4 c^6} \cdot a^3 b^2$$

$$h) \frac{\sqrt[5]{x^7 y^4}}{\sqrt[4]{16x^2 y^3}}$$

$$g) 2a^4 b^4 c^3$$

$$h) \frac{1}{2} \sqrt[10]{x^9} \cdot \sqrt[20]{y}$$

# 4.2.1 Wurzeln – Aufgaben

---

1. Vereinfachen Sie den Term und schreiben Sie die nicht ganzzahligen Exponenten wieder als Wurzel.

$$i) \sqrt[4]{\frac{x^2}{y^3}} \cdot \sqrt[5]{\frac{y^2}{x^3}}$$

$$j) \sqrt[3]{\frac{x^2}{y^{-4}z^2}} \cdot \sqrt[3]{x^2y^4z}$$

$$i) \frac{1}{10\sqrt{x} \cdot 20\sqrt[20]{y^7}}$$

$$j) \frac{\sqrt[3]{x^4} \sqrt[3]{y^8}}{\sqrt[3]{z}}$$

$$k) \frac{\sqrt[3]{\sqrt{x^{-4}}}}{\sqrt{x^2}} \cdot x$$

$$l) \frac{\sqrt{x} \sqrt[3]{y} \cdot (5\sqrt{y} \cdot x^2)^{-3}}{\sqrt{x} \cdot x^{-2}}$$

$$k) \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$$

$$l) \frac{1}{x^4 \cdot \sqrt[30]{y^{13}}}$$

$$m) (\sqrt[4]{x^3} + \sqrt{x^3})^2$$

$$n) \frac{\sqrt{x+y} \cdot \sqrt[3]{(x+y)^2} \cdot x}{\sqrt{x^4} \cdot (x+y)}$$

$$m) \sqrt{x^3} + 2 \cdot \sqrt[4]{x^9} + x^3$$

$$n) \frac{\sqrt[6]{x+y}}{\sqrt[3]{x^5}}$$

$$o) \frac{\sqrt[3]{a^4 - \sqrt{a^2}}}{a^3}$$

$$o) \frac{1}{\sqrt[3]{a^5}} - \frac{1}{a^2} = \frac{\sqrt[3]{a-1}}{a^2}$$

# 4.2.1 Wurzeln – Aufgaben

---

2. Berechnen Sie:

a)  $\sqrt[4]{\sqrt[3]{x^2}} \cdot \sqrt{\sqrt[6]{x^{10}}} + \sqrt[9]{y^6 \sqrt[4]{y^{12}}}$     b)  $a \cdot \sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2}}$     c)  $\sqrt[3]{\frac{a}{b}} \cdot \sqrt{\frac{b}{a}}$     d)  $a \cdot b \cdot \sqrt[3]{\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2}}$

e)  $a \sqrt{\left(\frac{n^{x+a}}{n^x}\right)^c}$     f)  $(n+x)^{3/4} \cdot \sqrt[4]{(n+x)^5}$     g)  $16\sqrt{a^6 \cdot b^7} \div 4\sqrt{a^4 \cdot b^5}$     h)  $\sqrt[3]{x\sqrt{x}} - 4\sqrt{x}$

a)  $x + y$     b)  $\sqrt{a^2 + b^2}$     c)  $\sqrt[6]{\frac{b}{a}}$     d)  $\sqrt[3]{ab(b^2 - a^2)}$     e)  $n^c$     f)  $(n+x)^2$     g)  $4ab$     h)  $-3\sqrt{x}$

## 4.3 Logarithmen - Definition

---

- Bisher: Probleme der Form:  $a^b = c$  mit gegebenen  $a, b \in \mathbb{R}$
- Nun: Lösung von Problemen der Form:  $a^b = c$  mit gegebenen  $a, c \in \mathbb{R}$ , z. B.  $2^b = 8$
- Durch Einführung des Logarithmus lässt sich das Problem umformulieren:  $\log_2 8 = b$   
Der Logarithmus beantwortet somit die Frage, wie oft die 2 mit sich selbst Mal genommen werden muss, um das Ergebnis 8 zu erhalten.
- Begrifflichkeiten:  $a$  wird als **Basis**,  $b$  als **Exponent** und  $c$  als **Numerus** bezeichnet.

## 4.3.1 Logarithmen - Rechenregeln

---

- Für alle Rechenregeln gilt:  $a, u, v > 0$ ;  $k \in \mathbb{R}$ ;  $n \in \mathbb{N}^*$

$$\log_a(u \cdot v) = \log_a(u) + \log_a(v)$$

$$\log_a(u^k) = k \cdot \log_a(u)$$

$$\log_a\left(\frac{u}{v}\right) = \log_a(u) - \log_a(v)$$

$$\log_a \sqrt[n]{u} = \frac{1}{n} \cdot \log_a(u)$$

$$\text{Basiswechsel } (a \rightarrow b): \log_a u = \frac{\log_b u}{\log_b a}$$

## 4.3.2 Logarithmen – besondere Logarithmen

---

- Zehnerlogarithmus bzw. dekadischer Logarithmus zur Basis 10:  $\log_{10}(u) := \lg(u)$
- Zweierlogarithmus bzw. binärer Logarithmus zur Basis 2:  $\log_2(u) := lb(u)$  oder  $ld(u)$
- Natürlicher Logarithmus (logarithmus naturalis) zur Basis  $e$ :  $\log_e(u) := \ln(u)$

## 4.3.2 Logarithmen – besondere Logarithmen

---

$$\log_b 1 = 0$$

$$\log_a a = 1$$

$$\log_b 0 \rightarrow -\infty$$

$$\log_a a^x = x$$

# 4.3.3 Logarithmen – Aufgaben

---

1. Berechnen Sie ohne Taschenrechner:

a)  $\log_3 9$    b)  $\log_2 8$    c)  $\log_2 \sqrt{2}$    d)  $\log_7 \frac{1}{49}$    e)  $\ln(e)$    f)  $\lg 100$

2. Berechnen Sie:

a)  $\frac{1}{2} \lg a + 2 \lg c - \frac{1}{3} (\lg b^3 + \lg a^{3/2})$

b)  $\frac{1}{2} \lg(a^2 - ab + b^2) + \frac{1}{2} \lg(a + b)$

c)  $\lg\left(\frac{a}{b}\right) + \lg(ab) - 2 \lg(a - b)$

d)  $\log_5 x = -2$

a)  $\lg\left(\frac{c^2}{b}\right)$

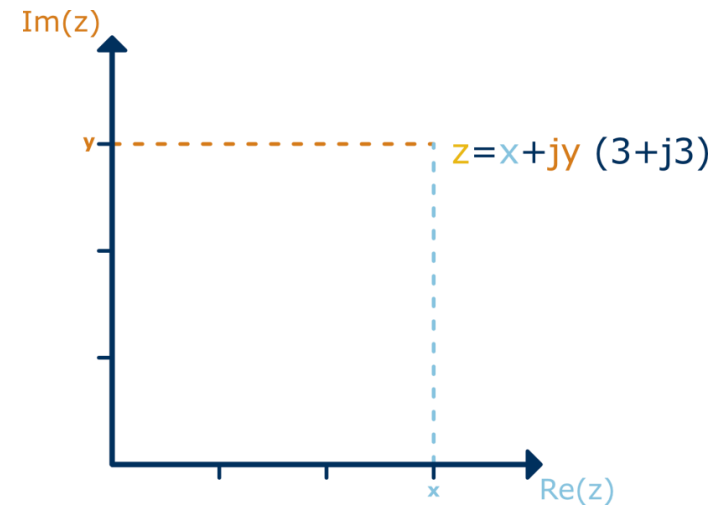
b)  $\lg \sqrt{a^3 + b^3}$

c)  $\lg\left(\frac{a}{a-b}\right)^2$

d)  $\frac{1}{25}$

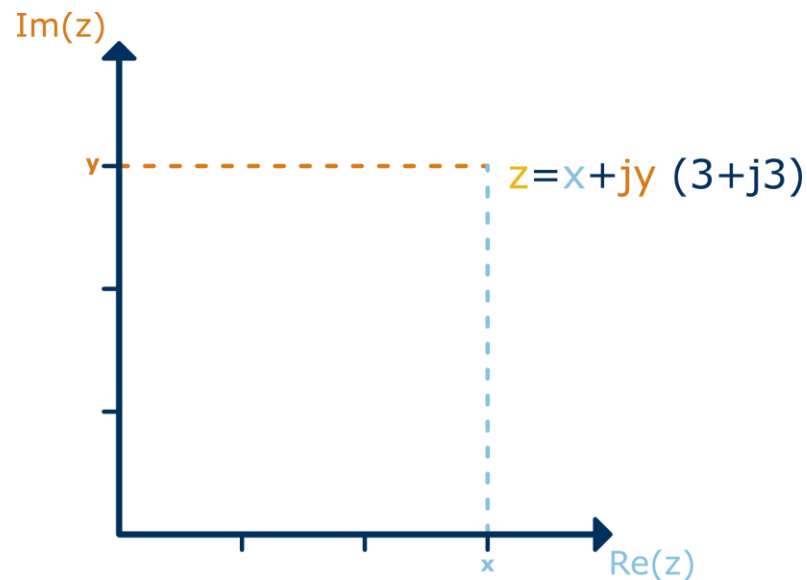
# 5 Exkurs – Komplexe Zahlen $\mathbb{C}$

- Die komplexen Zahlen erweitern die Reellen Zahlen um Lösungen der Wurzel aus negativen Zahlen. Hierzu wird die imaginäre Einheit  $j$  definiert:  $j^2 = -1 \rightarrow j = \sqrt{-1}$
- Eine komplexe Zahl  $z = x + jy$  setzen sich aus einem Realteil ( $\text{Re}(z)$ ) und einem Imaginärteil ( $\text{Im}(z)$ ) zusammen und wird nicht auf einem Zahlenstrahl, sondern in der **komplexen Zahlenebene** (Gaußsche Zahlenebene) angeordnet.



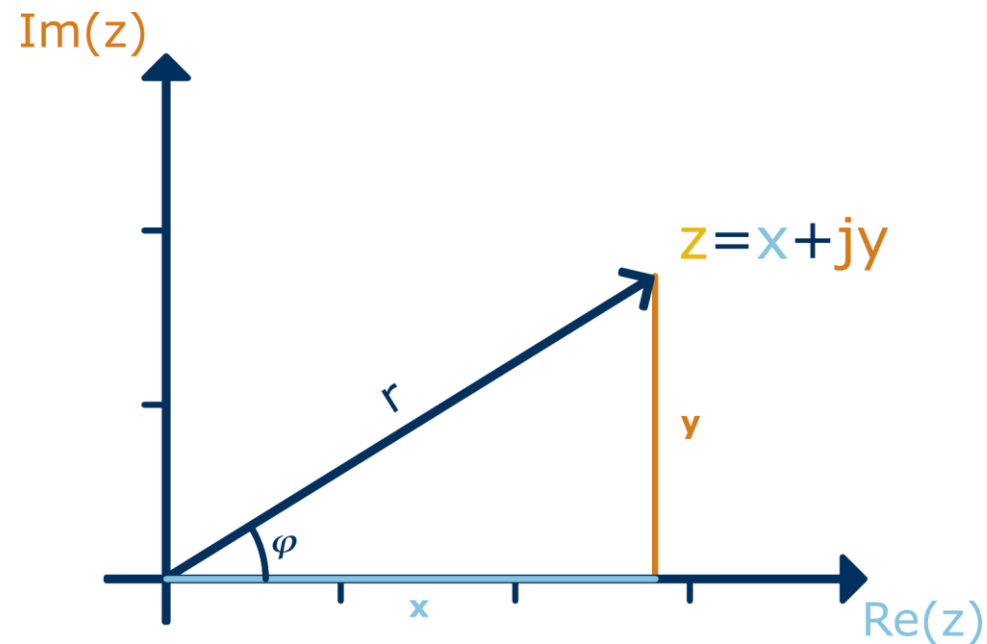
# 5 Exkurs – Komplexe Zahlen $\mathbb{C}$

- Die Punkte auf der reellen Achse bilden die Menge der **Reellen Zahlen** ( $z = x + j \cdot 0$ ).
- Die Punkte auf der imaginären Achse die **Imaginären Zahlen** ( $z = 0 + j \cdot y$ ).
- Komplexe Zahlen können einfach in einem **kartesischen Koordinatensystem** eingezeichnet werden.



# 5 Exkurs – Komplexe Zahlen $\mathbb{C}$

- Die komplexe Zahl  $z = x + jy$  kann auch durch **Polarkoordinaten**  $(r, \varphi)$  beschrieben werden. Diese sind festgelegt durch den **Betrag**  $r = |z|$  (Länge des zugehörigen Zeigers) und den **Winkel**  $\varphi$  zur positiven reellen Achse.

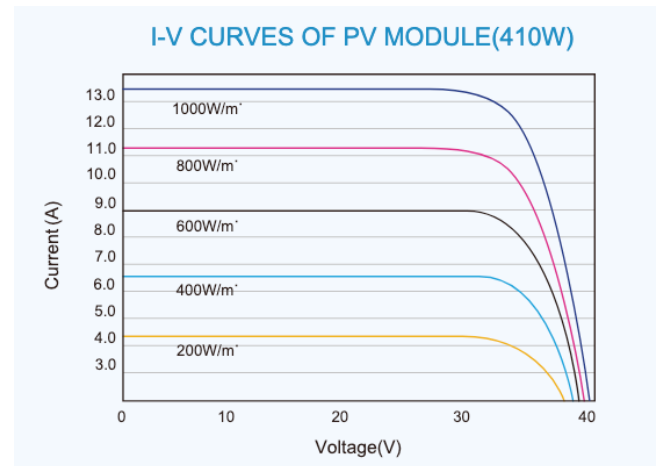


# 6 Gleichungen - Motivation

---

Beschreibung von technischen Sachverhalten mithilfe von (Funktions-)Gleichungen:

- Kennlinie eines PV-Moduls:
- Energiegehalt einer strömenden Flüssigkeit:  **$E_{ges} = E_{pot} + E_{kin} + E_p$**



# 6 Gleichungen - Definition

---

- Gleichungen sind Aussagen, denen man einen Wahrheitsgehalt geben kann.
- Sehr einfache Gleichungen enthalten keine unbekannt Elemente (Variablen). Für solche ist der Wahrheitswert unmittelbar ablesbar:

$$4 + 3 = 7 \Rightarrow \text{wahr}$$

$$12 + 2 = 3 \Rightarrow \text{falsch}$$

# 6 Gleichungen - Definition

---

- Aufwendiger (interessanter) wird es durch die Einführung von Variablen:

$$4 + x = 7$$

- Es können unendlich viele Werte für  $x$  eingesetzt werden, aber nur für einen Wert ( $x = 3$ ) ist die Gleichung wahr.
- Beim Umgang mit Gleichungen beschäftigt man sich häufig mit der Frage, für welche Werte die Gleichung den Wahrheitswert wahr annimmt. Hierzu wird die Gleichung „gelöst“.
- Gleichungen können mehrere Variablen aufweisen!

# 6 Gleichungen – Klassifizierung von Gleichungen

---

Es gibt unterschiedliche Klassen von Gleichungen. Diese werden anhand verschiedener Eigenschaften eingeordnet. Z. B. nach der ...

- Anzahl der Variablen
- Art der Verknüpfung der Variablen und Zahlen
- **algebraische Gleichungen** enthalten rationale Rechenoperationen (+, -, ·, ÷) und das Wurzelziehen (Radizieren) endlich oft. Die Variable kommt hierbei nicht im Exponenten vor.  
$$a_n \cdot x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + \dots + a_1 \cdot x^1 + a_0 = 0, \quad \text{mit } n \in \mathbb{N}, a_i \in \mathbb{R}$$
- **transzendente Gleichungen:**  $e^x - 1 = x$        $\sin(2x) + \ln x = 0$

# 6.1 Lineare Gleichungen

---

- Lineare Gleichungen sind Gleichungen, in denen die Variable nur mit der Potenz 1 vorkommt:

$$5x + 7 = 17$$

- Lineare Gleichungen haben immer exakt eine Lösung, die sich durch äquivalente Umformungen finden lässt: **Rechnung**
- Das Äquivalenzzeichen ist das gleiche wie aus der Logik, es bedeutet, dass die Aussage weiterhin äquivalent, also gleich ist. Sie ist auch wieder umkehrbar.

# 6.2 Quadratische Gleichungen

---

- Quadratische Gleichungen sind Gleichungen, in denen die Variable maximal mit der Potenz 2 vorkommt:

$$x^2 = 4$$

$$x^2 + 2x + 1 = 0$$

- Quadratische Gleichungen haben im Zahlenraum der Reellen Zahlen entweder keine oder zwei Lösungen. Diese lassen sich nur in den seltensten Fällen durch äquivalente Umformungen finden: [Rechnung](#)

# 6.2 Quadratische Gleichungen

---

- Quadratische Gleichungen sind Gleichungen, in denen die Variable maximal mit der Potenz 2 vorkommt:

$$x^2 = 4$$

$$x^2 + 2x + 1 = 0$$

- Im Allgemeinen lassen sich quadratische Gleichungen mithilfe der pq-Formel lösen:

1. Überführung der Gleichung  $ax^2 + bx + c = 0$  in die Form  $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = x^2 + px + q = 0$

2. Bestimmung der Lösungen (falls vorhanden) mithilfe der Formel:  $x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$

# 6.2 Quadratische Gleichungen

---

- Mithilfe des Ausdrucks unter der Wurzel (Diskriminante) lässt sich frühzeitig erkennen, ob die Gleichung lösbar ist, und wie viele Lösungen vorhanden sind.
  
- $D = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q > 0$ : zwei verschiedene reelle Lösungen
- $D = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = 0$ : eine (zwei identische) Lösungen
- $D = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q < 0$ : keine reelle Lösung (komplexe Lösung)

# 6.3 Gleichungen höheren Grades

---

- Bei Gleichungen vom Grad größer 2 ist eine analytische Lösungsfindung schwierig oder sogar unmöglich:
- $n = 3, 4$ : analytische Lösungen möglich, jedoch in der Praxis umständlich.
- $n > 4$ : ausschließlich numerisch lösbar.



# 6.4 Gleichungen – Aufgaben

---

2. Lösen Sie die Gleichungen nach  $x$  auf und geben Sie die Lösungsmenge an.

a)  $\frac{x-a}{a} = 24a$

b)  $6b = \frac{3b-x}{4b} + b$

a)  $\mathbb{L} = \{24a^2 + a\}$

b)  $\mathbb{L} = \{-20b^2 + 3b\}$

c)  $3c = (c - x) \cdot c$

d)  $\frac{ax}{a+c} = 2a$

c)  $\mathbb{L} = \{c - 3\}$

d)  $\mathbb{L} = \{2(a + c)\}$

e)  $4a = b \cdot \frac{3x}{a}$

f)  $2b - \frac{x+a}{a-b} \cdot b = 3b$

e)  $\mathbb{L} = \left\{ \frac{4}{3} \cdot \frac{a^2}{b} \right\}$

f)  $\mathbb{L} = \{b - 2a\}$

g)  $ax + bx = 3$

h)  $ax = \frac{2x}{b} + 4$

g)  $\mathbb{L} = \left\{ \frac{3}{a+b} \right\}$

h)  $\mathbb{L} = \left\{ \frac{4b}{ab-2} \right\}$

i)  $a + bx = \frac{2cx+4x}{a}$

j)  $\frac{3ax-12}{4b} = (5x - a) \cdot 3b$

i)  $\mathbb{L} = \left\{ \frac{a^2}{2c+4-ab} \right\}$

j)  $\mathbb{L} = \left\{ \frac{4(1-ab^2)}{a-20b^2} \right\}$

# 6.4 Gleichungen – Aufgaben

---

3. Bestimmen Sie die Lösungsmenge der Gleichungen.

a)  $x^2 + x - 6 = 0$

a)  $\mathbb{L} = \{-3, 2\}$

b)  $4x(2x + 5) = 14x\left(\frac{x}{2} + \frac{1}{7}\right) + 21x + 40$

b)  $\mathbb{L} = \{-5, 8\}$

c)  $2x^2 + 7x - 4 = 0$

c)  $\mathbb{L} = \left\{-4, \frac{1}{2}\right\}$

d)  $-3x^4 + 9x^2 - 6 = 0$

d)  $\mathbb{L} = \{-\sqrt{2}, -1, 1, \sqrt{2}\}$

e)  $6x^2(2x^4 - 3x^2) - 3 = 21x^3 - 3x^3(4x^3 + 5x) - 3x^4$

e)  $\mathbb{L} = \left\{-\frac{1}{2}, 1\right\}$

# 6.4 Gleichungen – Aufgaben

---

4. Lösen Sie die Gleichungen nach  $x$  auf.

a)  $\frac{3}{x} = 4$     b)  $a = \frac{b}{2x} + 4$     c)  $\frac{1}{x} = \frac{2}{a} + \frac{b}{3}$     d)  $\frac{3a+6b}{x} = \frac{24c}{5}$

a)  $x = \frac{3}{4}$     b)  $x = \frac{b}{2(a-4)}$     c)  $x = \frac{3a}{6+ab}$     d)  $x = \frac{5(a+2b)}{8c}$

5. Lösen Sie die Gleichungen nach  $x$  auf.

a)  $(3x - 7) \cdot (x + 2) = 0$     b)  $3x^2 + 5x = 0$     c)  $x^2 + 5x + 6 = 0$

d)  $3x^2 - 5x + 4 = 0$     e)  $(x - 1)^2 \cdot (x + 2) = 4 \cdot (x + 2)$

f) Gegeben sei  $x^2 + 2 \cdot (k + 2) \cdot x + 9k = 0$ , für welches  $k$  fallen die Nullstellen zusammen?

a)  $x_1 = \frac{7}{3}, x_2 = -2$     b)  $x_1 = 0, x_2 = -\frac{5}{3}$     c)  $x_1 = -2, x_2 = -3$     d) *komplexe Lösung*

e)  $x_1 = -2, x_2 = 3, x_3 = -1$     f)  $k_1 = 1, k_2 = 4$

# 6.5 Wurzelgleichungen

---

- Wurzelgleichungen sind Gleichungen, in denen die Variable (auch) in einer Wurzel vorkommt:

$$\sqrt{x + 1} + 1 = 3$$

- Wurzelgleichungen lassen sich stets durch ein algorithmisches Lösungsverfahren lösen:
  1. Den Wurzelausdruck auf einer Seite des Gleichheitszeichens isolieren.
  2. Quadrieren der gesamten Gleichung.
  3. Die Variable auf einer Seite des Gleichheitszeichens isolieren.
  4. Probe durchführen.

# 6.6.1 Wurzelgleichungen – Aufgaben

---

1. Lösen Sie die Gleichungen und führen Sie die Probe durch.

a)  $3 - 2\sqrt{x} = -4$

b)  $\sqrt{x-1} + \sqrt{x+8} = 9$

c)  $\sqrt{16 + 3\sqrt{7x-5}} = 2\sqrt{7}$

d)  $\sqrt{x+3} + \sqrt{2(x-4)} = \frac{15}{\sqrt{x+3}}$

e)  $\sqrt{2x-3} + 5 - 3x = 0$

f)  $\sqrt{x+15} - \sqrt{10-x} = 1$

g)  $\sqrt{x+1} + \sqrt{2x+3} - \sqrt{8x+1} = 0$

h)  $\sqrt[3]{28 - \sqrt{2x-3}} = 3$

a)  $x = \frac{49}{4}$  (w)

b)  $x = 17$  (w)

c)  $x = 3$  (w)

d)  $x_1 = 6$  (w),  $x_2 = -28$  (f)

e)  $x_1 = 2$  (w),  $x_2 = \frac{14}{9}$  (f)

f)  $x_1 = 1$  (w),  $x_2 = -6$  (f)

g)  $x_1 = -\frac{1}{17}$  (f),  $x_2 = 3$  (w)

h)  $x = 2$  (w)

## 6.6.2 Wurzelgleichungen – Aufgaben

2. Bestimmen Sie die Lösungsmengen.

a)  $\sqrt{x + 42} = x$

b)  $\sqrt{3x^2 + 2} = \sqrt{4x^2 - 7}$

c)  $\sqrt{8x + 20} = 5x - 4$

d)  $2x + \sqrt{41 - 8x} = 5$

e)  $6x + 4 + \sqrt{-30x + 26} = 9x - 1$

f)  $\sqrt{-12x} - \sqrt{-8x + 1} = \sqrt{2x + 7}$

g)  $\sqrt{9x + 9} - \sqrt{7x - 7} = \sqrt{-x + 12}$

h)  $\sqrt{x} \cdot \sqrt[3]{x} = 32$

i)  $\frac{32}{\sqrt[3]{x^2}} = 2\sqrt[3]{x^2}$

j)  $\frac{3x-2}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x} - 1$

a)  $x_1 = 7$  (w),  $x_2 = -6$  (f)

b)  $x_{1,2} = \pm 3$  (w)

c)  $x_1 = 2$  (w),  $x_2 = -\frac{2}{25}$  (f)

d)  $x_1 = -1$  (w),  $x_2 = 4$  (w)

e)  $x_{1,2} = \pm \frac{1}{3}$  (f)

f)  $x_1 = -3$  (w),  $x_2 = -\frac{3}{25}$  (f)

g)  $x_1 = 8$  (w),  $x_2 = \frac{44}{37}$  (w)

h)  $x = 64$  (w)

i)  $x_{1,2} = \pm 8$  (2)

j)  $x_1 = 1$  (w),  $x_2 = 4$  (f)

# 6.7 Logarithmusgleichungen

---

- Logarithmusgleichungen sind Gleichungen, in denen die Variable (auch) im Numerus eines Logarithmus vorkommt:

$$\lg x = 10$$

- Logarithmusgleichungen lassen sich durch ein algorithmisches Lösungsverfahren lösen:
  1. Den Logarithmus auf einer Seite des Gleichheitszeichens isolieren.
  2. Potenzieren der gesamten Gleichung
  3. Die Variable auf einer Seite des Gleichheitszeichens isolieren.

# 6.7 Logarithmusgleichungen – Aufgaben

---

1. Berechnen Sie die Lösung für  $x$ .

a)  $\log_2 x = 5$

b)  $\log_x 4 = 2$

c)  $\log_x 27 = 3$

d)  $\log_x 4 = \frac{2}{3}$

e)  $\log_3 x = 2$

f)  $\log_x 81 = 4$

g)  $\log_{10} x = 1$

h)  $\text{lb } 128 = x$

i)  $\ln x = 2$

j)  $\ln x = 5$

a)  $x = 32$

b)  $x = 2$

c)  $x = 3$

d)  $x = 8$

e)  $x = 9$

f)  $x = 3$

g)  $x = 10$

h)  $x = 7$

i)  $x = e^2$

j)  $x = e^5$

# 6.7 Logarithmusgleichungen – Aufgaben

---

2. Berechnen Sie die Lösung für  $x$ .

a)  $\log_3 x + \log_3 x = 4$

a)  $x = 9$

b)  $\log_5(x) + \log_5(x^2) = 3$

b)  $x = 5$

c)  $2 \log_9(x) + \log_9(x) = 3$

c)  $x = 9$

d)  $3 \log_2(x) - 2 \log_2(2x) = -3$

d)  $x = \frac{1}{2}$

e)  $4 \log_3(3x) + 2 \log_3(4x) = \log_3(48x^3)$

e)  $x = \frac{1}{3}$

f)  $\log_2(x) \cdot \log_2(16) = 4$

f)  $x = 2$

g)  $6 \ln x = 2 \ln(25x) + 8$

g)  $x = 5e^2$

# 6.8 Ungleichungen

---

- Eine Ungleichung beschreibt zwei Terme, die nicht wie bisher genau gleich sein sollen. Die Beziehung der Terme wird über andere Relationszeichen ( $<$ ,  $>$ ,  $\leq$ ,  $\geq$ ) beschrieben.
- Als Lösung von Ungleichungen ergeben sich keine eindeutigen Lösungen, sondern Intervalle, in denen die Ungleichung den Wahrheitswert „wahr“ annimmt.

$$x + 2 > -8$$

# 6.8 Ungleichungen

---

$$x + 2 > -8$$

- Zum Lösen von Ungleichungen können folgende Umformungen genutzt werden:
  1. Addition oder Subtraktion eines Terms auf beiden Seiten der Ungleichung.
  2. Multiplikation oder Division eines Terms auf beiden Seiten der Ungleichung ...
    - a. mit einer positiven Zahl ohne Einschränkungen.
    - b. mit einer negativen Zahl mit „Drehung“ des Relationszeichens ( $< \leftrightarrow >$ ,  $\leq \leftrightarrow \geq$ ).

# 6.7.2 Ungleichungen – Aufgaben

---

1. Berechnen Sie die Lösungsmengen.

a)  $2x - 3 > 9$

b)  $4x - 2 \leq 6$

c)  $-5x + 2 < -4x + 7$

d)  $-6x + 3 \geq 6$

e)  $-9x + 4 \geq -2$

f)  $x^2 - x - 2 \leq 0$

g)  $x^2 + x - 1 \geq 0$

h)  $\frac{x-1}{x+1} < 1$

a)  $\mathbb{L} = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 6\}$

b)  $\mathbb{L} = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 2\}$

c)  $\mathbb{L} = \{x \in \mathbb{R} \mid x > -5\}$

d)  $\mathbb{L} = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq -\frac{1}{2}\right\}$

e)  $\mathbb{L} = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq \frac{2}{3}\right\}$

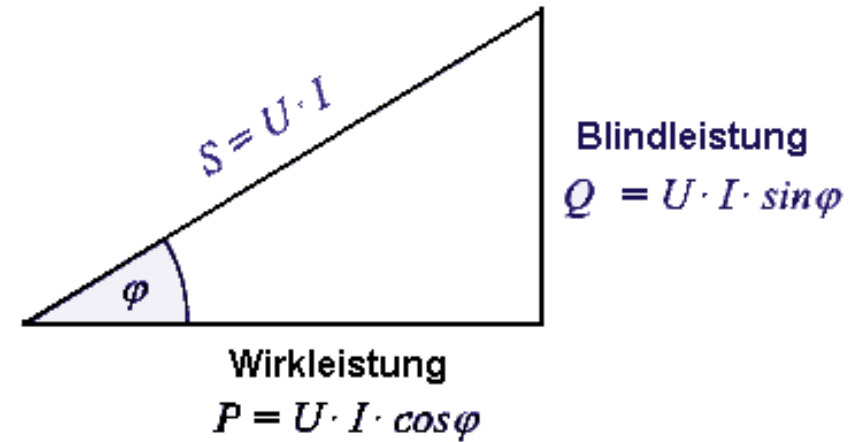
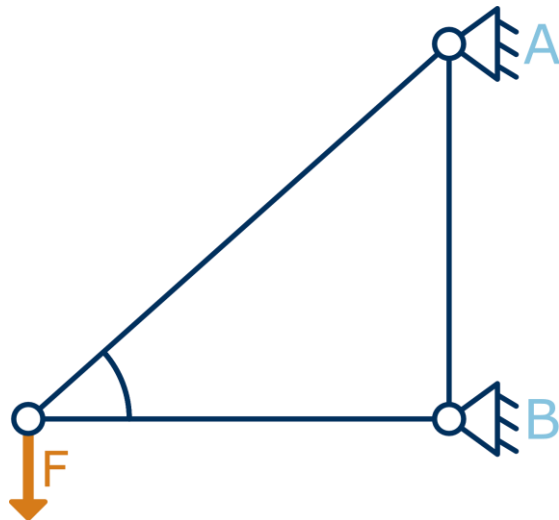
f)  $\mathbb{L} = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 \leq x \leq 2\}$

g)  $\mathbb{L} = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq -\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{5}{4}} \vee x \geq -\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{5}{4}}\right\}$

h)  $\mathbb{L} = \{x \in \mathbb{R} \mid x > -1\}$

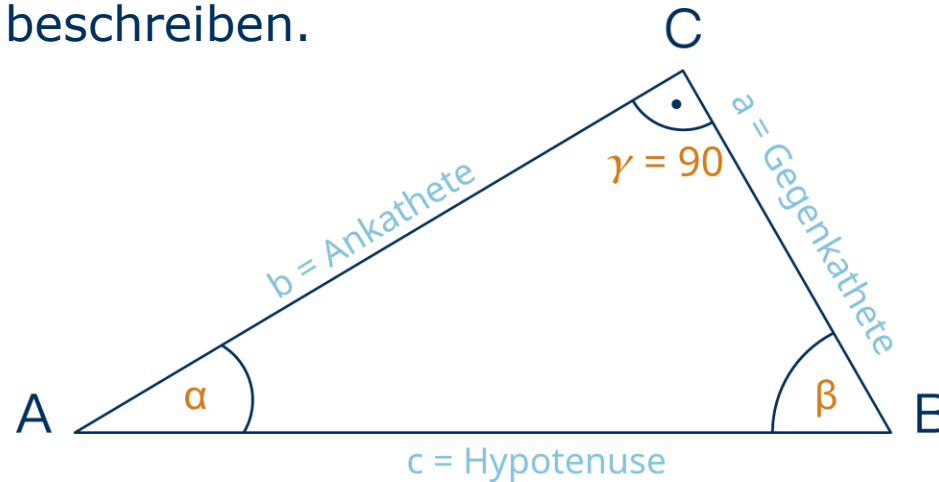
# 7 Trigonometrische Formeln - Motivation

- Wechselstromrechnung
- Statik



# 7 Trigonometrische Formeln

- Mithilfe der **Trigonometrischen Formeln** (Funktionen) lassen sich Zusammenhänge in rechtwinkligen Dreiecken beschreiben.



$$\sin \alpha = \frac{a}{c} = \frac{\text{Gegenkathete von } \alpha}{\text{Hypotenuse von } \alpha}$$

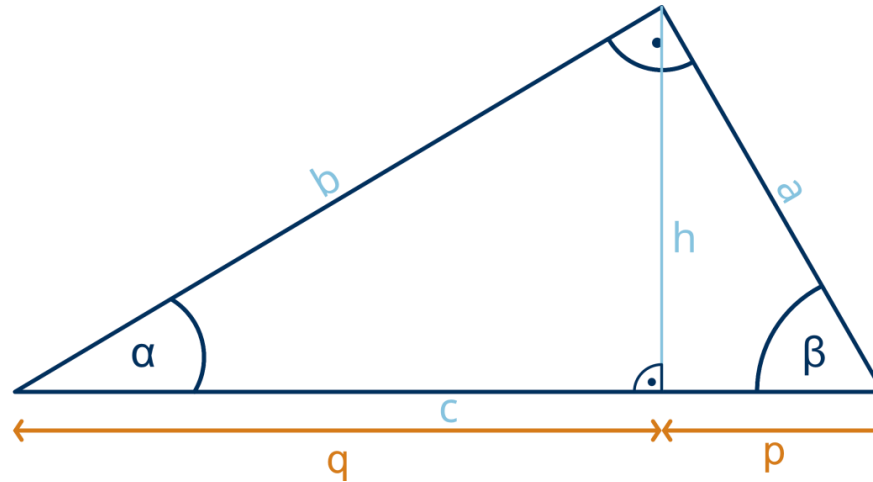
$$\cos \alpha = \frac{b}{c} = \frac{\text{Ankathete von } \alpha}{\text{Hypotenuse von } \alpha}$$

$$\tan \alpha = \frac{a}{b} = \frac{\text{Gegenkathete von } \alpha}{\text{Ankathete von } \alpha}$$

$$\cot \alpha = \frac{1}{\tan \alpha} = \frac{b}{a} = \frac{\text{Ankathete von } \alpha}{\text{Gegenkathete von } \alpha}$$

# 7 Trigonometrische Formeln

---



Satz des Pythagoras:  $a^2 + b^2 = c^2$

Höhensatz:  $h^2 = p \cdot q$  |  $\sin \alpha = \frac{h}{b}$  |  $\sin \beta = \frac{h}{a}$

Fläche:  $A = \frac{a \cdot b}{2} = \frac{h \cdot c}{2}$

Kathetensatz:  $a^2 = p \cdot c$  |  $b^2 = q \cdot c$

$\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$

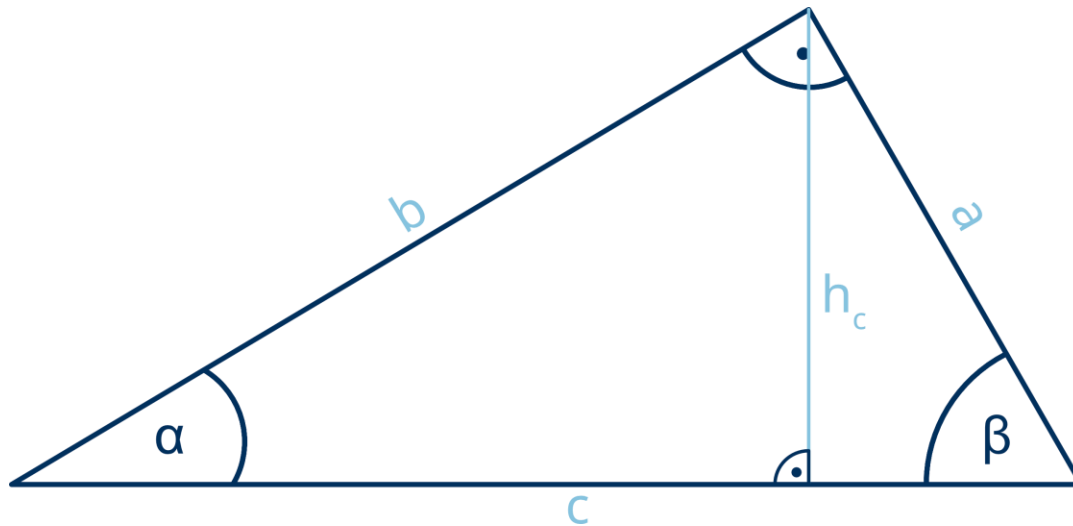
Sinussätze:  $\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma}$

# 7.1 Trigonometrische Formeln – Aufgaben

(gerundet auf drei Nachkommastellen)

1. Vom dargestellten Dreieck sind  $\beta = 65^\circ$  und  $h_c = 22\text{m}$  bekannt.

Berechnen Sie die Länge  $a$ ,  $b$  und  $c$ , den Winkel  $\alpha$  und den Flächeninhalt  $A$ .



$$\alpha = 25^\circ \quad (\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ)$$

$$a = 24,274 \text{ m} \quad (\sin \beta = \frac{h}{a})$$

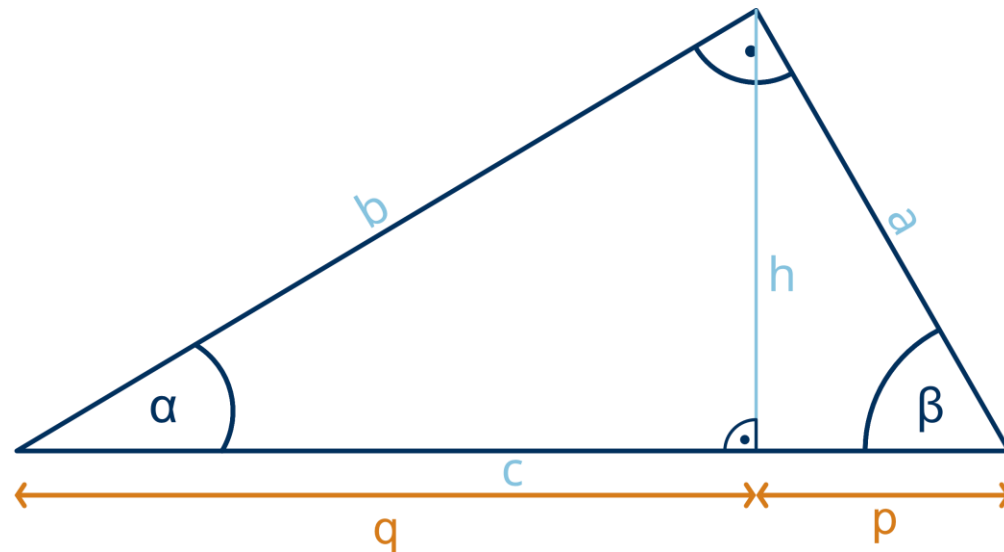
$$b = 52,056 \text{ m} \quad (\tan \alpha = \frac{a}{b})$$

$$c = 57,437 \text{ m} \quad (a^2 + b^2 = c^2)$$

$$A = 631,8 \text{ m}^2 \quad (A = \frac{a \cdot b}{2})$$

# 7.1 Trigonometrische Formeln – Aufgaben

2. Berechnen Sie jeweils die fehlenden Seiten und Innenwinkel zu den gegebenen Angaben.



a)  $p = 4,93 \text{ cm} \mid \beta = 70,3^\circ$

b)  $p = 28 \text{ cm} \mid q = 63 \text{ cm}$

c)  $a = 12,5 \text{ cm} \mid p = 4,4 \text{ cm}$

d)  $h = 9,1 \text{ cm} \mid q = 9 \text{ cm}$

e)  $a = 27,8 \text{ cm} \mid A = 373 \text{ cm}^2$

# 7.1 Trigonometrische Formeln – Aufgaben

(gerundet auf drei Nachkommastellen)

---

2. Berechnen Sie jeweils die fehlenden Seiten und Innenwinkel zu den gegebenen Angaben.

a)  $p = 4,93 \text{ cm} \mid \beta = 70,3^\circ, \alpha = 19,7^\circ, a = 14,625 \text{ cm}, b = 40,847 \text{ cm}, c = 43,386 \text{ cm}$

b)  $p = 28 \text{ cm} \mid q = 63 \text{ cm}, c = 91 \text{ cm}, h = 42 \text{ cm}, a = 50,478, b = 75,717, \alpha = 33,69^\circ, \beta = 56,31^\circ$

c)  $a = 12,5 \text{ cm} \mid p = 4,4 \text{ cm}, h = 11,7 \text{ cm}, c = 35,511, b = 33,238, \alpha = 20,61^\circ, \beta = 69,39^\circ$

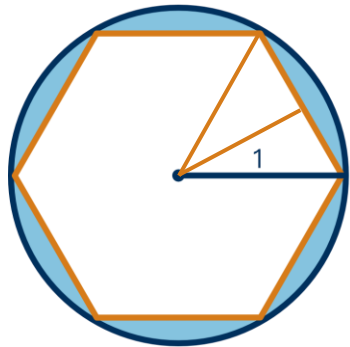
d)  $h = 9,1 \text{ cm} \mid q = 9 \text{ cm}, p = 9,201, c = 18,201, b = 12,799, a = 12,941, \alpha = 45,317^\circ, \beta = 44,683^\circ$

e)  $a = 27,8 \text{ cm} \mid A = 373 \text{ cm}^2, b = 26,835 \text{ cm}, c = 38,639 \text{ cm}, \alpha = 46,012^\circ, \beta = 43,988^\circ$

# 7.1 Trigonometrische Formeln – Aufgaben

(gerundet auf drei Nachkommastellen)

3. Berechnen Sie jeweils, um wie viel Prozent der Flächeninhalt des Vielecks vom Flächeninhalt des Kreises abweicht.

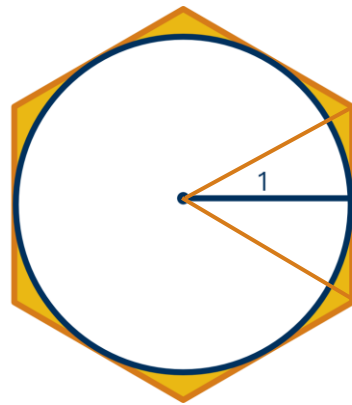


$$h = b_{\text{halb}} = \sqrt{c^2 - a^2}$$

$$h = b = \sqrt{1^2 - 0,5^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{Fläche}_{\text{halb}} = \frac{a \cdot b}{2} = \frac{\sqrt{3}}{8} \cdot 12 = 2,598$$

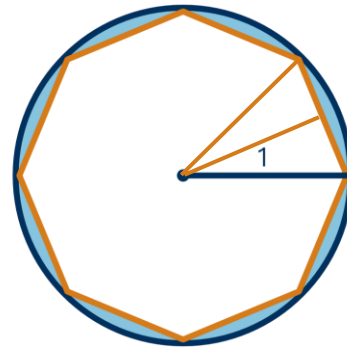
Abweichung: -17,3%



$$a_{\text{halb}} = \tan(30) \cdot 1 = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$A_{\text{halb}} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{3} \cdot 1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{6} \cdot 12 = 3,464$$

Abweichung: +10,3%

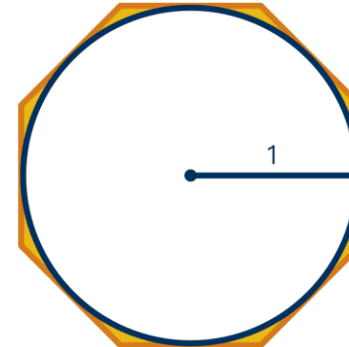


$$a_{\text{halb}} = \sin(22,5^\circ) \cdot 1 = 0,383$$

$$b = \sqrt{1^2 - 0,383^2} = 0,924$$

$$A_{\text{halb}} = \frac{a \cdot b}{2} = \frac{0,383 \cdot 0,924}{2} = 2,831$$

Abweichung: -9,9%



$$A_{\text{Kreis}} = \pi \cdot r^2 = \pi \cdot 1^2 = \pi$$

$$a_{\text{halb}} = \tan(22,5^\circ) \cdot 1 = 0,414$$

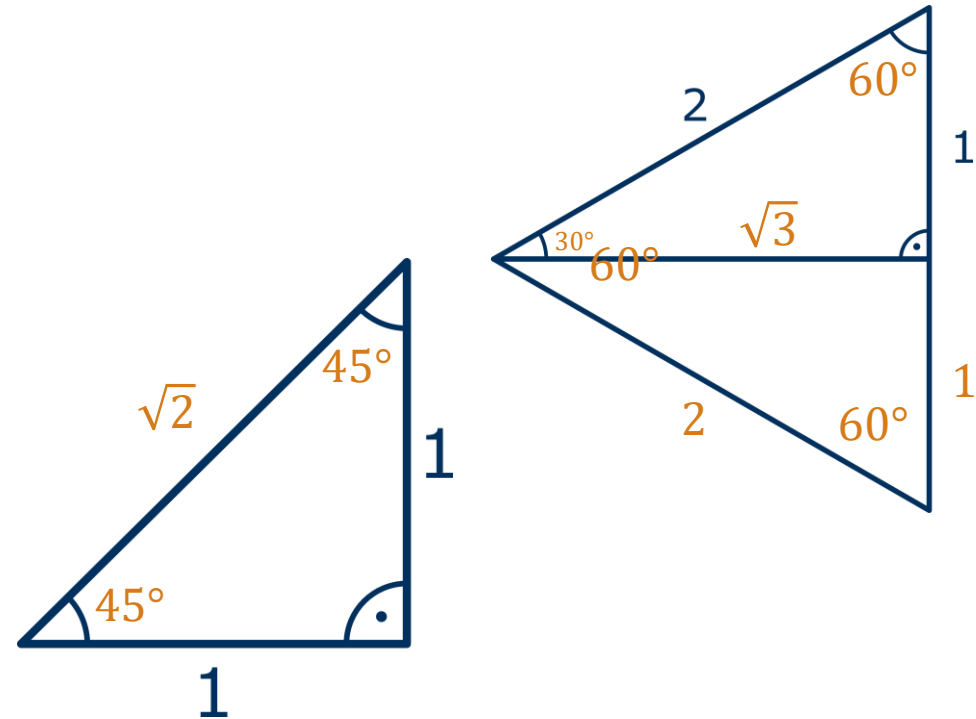
$$A_{\text{halb}} = \frac{0,414 \cdot 1}{2} = 0,207 \cdot 16 = 3,312$$

Abweichung: +5,4%

# 7.1 Trigonometrische Formeln – Aufgaben

4. Für die Winkel  $30^\circ$ ,  $45^\circ$  und  $60^\circ$  kann man die Werte der Winkelfunktion auch ohne TR ermitteln.
- Ermitteln Sie (ohne TR) die Winkel und Seitenlängen in den beiden Dreiecken.
  - Füllen Sie die Tabelle aus (ohne TR).

	$\alpha = 30^\circ$	$\alpha = 45^\circ$	$\alpha = 60^\circ$
$\sin(\alpha)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\cos(\alpha)$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$
$\tan(\alpha)$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$



# 7.1 Übungsaufgaben - Trigonometrische Formeln

---

5. Von einem spitzen Winkel  $\alpha$  wissen Sie, dass  $\tan(\alpha) = \frac{5}{12}$  gilt. Ermitteln Sie  $\sin(\alpha)$  und  $\cos(\alpha)$ .

$$\sin(\alpha) = \frac{5}{13}, \quad \cos(\alpha) = \frac{12}{13}$$

# 8 Induktionsbeweise

---

- Ein Induktionsbeweis ist eine mathematische Methode, um zu zeigen, dass eine Aussage für alle Natürlichen Zahlen gilt.
- Die Aussage wird zunächst für **eine Startzahl** (Induktionsanfang) und dann schrittweise für **alle weiteren Zahlen** (Induktionsschritt) bewiesen.

# 8.1 Induktionsbeweise – Gaußsche Summenformel

---

- Behauptung:

$$\sum_{i=1}^n i = 0 + 1 + \dots + n = \frac{n \cdot (n+1)}{2}$$

- Induktionsanfang ( $n = 1$ ):

$$\sum_{i=1}^1 i = 1 = \frac{1 \cdot (1+1)}{2}$$

- Induktionsannahme:

Es wird angenommen, dass die Aussage für ein beliebiges  $n \in \mathbb{N}$  gilt.

# 8.1 Induktionsbeweise – Gaußsche Summenformel

---

- Induktionsschluss:

Es wird nun gezeigt, dass wenn die Aussage für ein beliebiges  $n \in \mathbb{N}$  gilt, diese auch für alle  $n \in \mathbb{N}$  gilt.

**Ziel:** Zeigen, dass die Summe der ersten  $n + 1$  Natürlichen Zahlen  $\frac{(n+1) \cdot ((n+1)+1)}{2}$  ergibt.

$$\sum_{i=1}^{n+1} i = \frac{n \cdot (n+1)}{2} + (n + 1) = \frac{n \cdot (n+1)}{2} + \frac{2(n+1)}{2} = \frac{n \cdot (n+1) + 2(n+1)}{2} = \frac{(n+1) \cdot (n+2)}{2} = \frac{(n+1) \cdot ((n+1)+1)}{2}$$

**q. e. d.**